

Université de la Méditerranée
Faculté des Sciences de Luminy
Département de Mathématiques

Licence Mathématiques-Informatique

L2

Algèbre, MAT5

Résumé du cours et Exercices

M.-RENÉE FLEURY-DONNADIEU

RICHARD ZEKRI

Janvier 2005

Table des matières

1	Réduction de matrices	5
1.1	Vecteurs propres-Valeurs propres	5
1.2	Polynôme caractéristique.	6
1.3	Diagonalisation	7
1.4	Trigonalisation (triangulation)	10
1.5	Théorème de Cayley-Hamilton	12
1.6	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	13
2	Espace dual	19
2.1	Dual d'un espace E	19
2.2	Bases duales	19
3	Formes Bilinéaires et Formes Quadratiques	21
3.1	Formes bilinéaires	21
3.2	Formes quadratiques	23
4	Espaces Euclidiens	29
4.1	Produit scalaire, norme	29
4.2	Endomorphisme adjoint	31
4.3	Groupe Orthogonal	32
4.4	Endomorphisme symétrique	33
5	Espaces Hermitiens	35
5.1	Produit scalaire hermitien, norme	35
5.2	Endomorphisme adjoint	37
5.3	Groupe unitaire	38
5.4	Endomorphisme hermitien, Matrice hermitienne	39
5.5	Endomorphisme normal, Matrice normale	39
6	Exercices	41
6.1	Réduction de matrices	41
6.2	Dualité	44
6.3	Formes bilinéaires et Formes quadratiques	45

6.4	Espaces euclidiens	47
6.5	Espaces hermitiens	50

BIBLIOGRAPHIE

- G. BOURDAUD
Mathématiques pour la physique Diderot Editeur, Arts et Sciences
- J. GRIFFONE
Algèbre linéaire Cépadues édition
- J.B. HIRIART-URRUTY ET Y.PLUSQUELLEC
Algèbre linéaire et bilinéaire Cépadues édition
- S.LANG
Algèbre linéaire Interédition
- J. LELONG-FERRAND ET J.M. ARNAUDIES
Cours de mathématiques : T.1 ; Algèbre : Dunod Université
- S.LIPSCHUTZ
Algèbre linéaire, Cours et problèmes Schaum
- M. QUEYSANNE
Algèbre MP et Spéciales AA' Armand Colin. Coll U
- E. RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX
Cours de Mathématiques Spéciales B. , T1, T2 Masson
- B. RUNGALDIER
l'Algèbre linéaire bien tempérée Ellipses
- M. SERFATI
Exercices de math. : Algèbre Belin - DIA

Chapitre 1

Réduction de matrices

1.1 Vecteurs propres-Valeurs propres

Notations du chapitre (sauf indication contraire)

- E désigne un espace vectoriel sur K , de dimension n .
- u un endomorphisme de E ,
- λ un élément de K et

$$E_\lambda(u) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$$

Lorsque le contexte le permettra, on écrira seulement E_λ au lieu de $E_\lambda(u)$.

Lemme 1.1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

1. $\forall \lambda \in K$ E_λ est un sous-espace vectoriel de E

2. E_λ est le noyau de l'endomorphisme $u - \lambda Id_E$.

$$E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$$

3. La restriction de u à E_λ est l'homothétie de rapport λ .

Définitions 1.2 (Valeur propre, Vecteurs propres et Espace propre) .

1. λ est dite valeur propre de l'endomorphisme u ssi $E_\lambda \neq \{0\}$.
2. Si λ est une valeur propre de u , alors E_λ est appelé espace propre relatif à λ
3. Les éléments non nuls de l'espace propre E_λ sont alors appelés les vecteurs propres de u relatifs à la valeur propre λ .

Corollaire 1.3 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

λ est une valeur propre de u $\iff \exists x \neq 0 \quad u(x) = \lambda x$

Théorème 1.4 :

1. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ est directe.
2. Le nombre de valeurs propres de u est au plus égal à la dimension de E . (Ce nombre peut être nul.)

Hypothèses-Notations (suite) :

- Désormais E est supposé de dimension finie et $\dim(E) = n$
- A désignera une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K ($\in \mathcal{M}_n(K)$)

Définitions 1.5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in K$.

1. $\lambda \in K$ est dite valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne X non nul tel que : $A.X = \lambda X$

$$2. E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) / A(X) = \lambda X\}$$

Théorème 1.6 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base de E , $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} , et $\lambda \in K$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. λ est une valeur propre de u .
2. λ est une valeur propre de $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
3. $(u - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas injective.
4. $(u - \lambda \text{Id}_E)$ n'est pas inversible.
5. $(A - \lambda I_n)$ n'est pas inversible.
6. $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$.
7. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Théorème 1.7 (récapitulatif) : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base de E , $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, et $\lambda \in K$.

1. λ est une valeur propre de u ssi λ est une valeur propre de $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Soit X le vecteur colonne représentatif du vecteur $x \in E$.
- $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ ssi $X \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

- $x \in E_\lambda(u)$ ssi $X \in E_\lambda(A)$.

Corollaire 1.8 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$ où $A = M_{\mathcal{B}}(u)$

1. Pour que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme u , il faut et il suffit que $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
2. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre λ sont les solutions non nulles du système linéaire $(A - \lambda I_n).X = 0$
3. $\dim(E_\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda I_n)$.

1.2 Polynôme caractéristique.

On rappelle que $K[t]$ désigne l'anneau des polynômes à une variable (dénotee t) sur le corps K , et que cet anneau peut être plongé dans le corps des fractions rationnelles à une variable.

Notations (suite) : Si on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(K)$, $A - tI_n$ désigne une matrice carrée d'ordre n , à coefficients dans $K[t]$.

Proposition 1.9 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\det(A - tI_n) \quad \text{et} \quad \det(u - t \text{Id}_E) \quad \text{sont des polynômes de } K[t]$$

Définitions-Notations 1.10 (polynôme caractéristique) :

1. $P_A(t) = \det(A - t I_n)$ désigne le polynôme caractéristique de la matrice A .
2. $P_u(t) = \det(u - t \text{Id}_E)$ désigne le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u .

Proposition 1.11 : Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n tel que :

1. le coefficient de t^n est $(-1)^n$.
2. le coefficient de t^{n-1} est $(-1)^{n-1}(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}) = (-1)^{n-1} \cdot \text{Tr}(A)$
3. le coefficient constant est $\det(A)$.

Proposition 1.12 :

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
2. Si $A = M_B(u)$, alors $P_A(t) = P_u(t)$

Rappel : Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}.A.P$; elles représentent alors le même endomorphisme dans deux bases, et P est la matrice de passage entre ces deux bases

Proposition 1.13 (caractéristique d'une valeur propre) :

λ est valeur propre de A (resp. de u) ssi λ est une racine de son polynôme caractéristique $P_A(t)$ (resp. $P_u(t)$).

Définitions 1.14 : Soit λ une valeur propre de $A = M_B(u)$.

1. $k(\lambda)$ appelé l'ordre de multiplicité algébrique de λ , est le plus grand entier k tel que $(\lambda - t)^k$ divise $P_A(t)$.
2. $r(\lambda)$ appelé l'ordre de multiplicité géométrique de λ est la dimension du sous-espace propre E_λ .

Proposition 1.15 : La dimension du sous-espace propre E_λ est au plus égale à l'ordre de multiplicité algébrique de λ . $r(\lambda) \leq k(\lambda)$

1.3 Diagonalisation

Définition 1.16 :

1. Un endomorphisme u de E est dit **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres pour u .
2. Une matrice A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 1.17 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $M_B(u)$ sa matrice représentative.

u est diagonalisable ssi $M_B(u)$ est diagonalisable.

Définition 1.18 (polynôme scindable) :

Un polynôme $P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ est scindable ssi

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \quad \exists k_1, \dots, k_p \quad P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \times \dots \times (\lambda_p - t)^{k_p}$$

Remarque : Si \mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes, alors tous les polynômes à coefficients dans \mathbb{C} sont scindables. Par contre, il existe des polynômes à coefficients réels qui ne sont pas scindables, par exemple : $t^2 + 1$ est un polynôme irréductible sur \mathbb{R} .

Proposition 1.19 : Si A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindable dans K

ATTENTION : La condition est nécessaire mais pas suffisante.

Théorème 1.20 (Critère de diagonalisation) : A (ou u) est diagonalisable ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le polynôme caractéristique de A est scindable dans K .
Notons : $P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \times \dots \times (\lambda_p - t)^{k_p}$ où tous les λ_i sont distincts.

2. Pour chaque valeur propre λ_i , son ordre de multiplicité algébrique k_i doit être égal à son ordre de multiplicité géométrique r_i ($= \dim(E_{\lambda_i})$)

$$k_i = \dim(E_{\lambda_i})$$

Corollaire 1.21 : Soit $A \in \mathcal{M}(K)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de A (resp. de u) a n racines distinctes dans K , alors A (resp. u) est diagonalisable.

Proposition 1.22 Si A est diagonalisable, si D est une matrice diagonale semblable à A (i.e. $\exists P \quad D = P^{-1}.A.P$), alors

$$A^k = P.D^k.P^{-1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

Si de plus A est inversible alors

$$A^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1} \quad \text{et } A^{-k} = P.D^{-k}.P^{-1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

Algorithme 1.23 (de diagonalisation) : Soit la matrice A

1. On calcule son polynôme caractéristique P_A et on essaie de le scinder

(a) Si P_A n'est pas scindable ("factorisable complètement") alors **A n'est pas diagonalisable** et on s'arrête.

(b) Si P_A est scindable alors on le met sous la forme

$$P_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \times \dots \times (t - \lambda_p)^{k_p}.$$

où tous les λ_i sont distincts

2. Pour chaque valeur propre λ_i on pose $M_i = A - \lambda_i I_n$, $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(M_i)$; on calcule $r(\lambda_i) = n - \text{rg}(M_i) = \dim(E_{\lambda_i})$.

(a) Si $r(\lambda_i) = k_i$ on détermine une base \mathcal{B}_{λ_i} de E_{λ_i} en résolvant le système linéaire : $M_i.X = 0$

(b) Si $r(\lambda_i) \neq k_i$, alors **A n'est pas diagonalisable**, et on s'arrête.

3. Si pour chaque valeur propre la condition du 2-a) est vérifiée alors on continue :

- On pose : $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_{\lambda_i} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

- On forme \underline{P} la matrice dont les colonnes sont les vecteurs colonnes représentatifs des vecteurs v_k (matrice de passage de la base canonique initiale à la nouvelle base \mathcal{B}).

- On forme D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les λ_i valeurs propres (dans le même ordre) relatives aux v_k de \mathcal{B} .

La matrice D obtenue est la matrice diagonale semblable à la matrice A relativement à la base \mathcal{B} i.e. $\underline{D} = \underline{P}^{-1}.A.\underline{P}$

1.3.1 Exemples de diagonalisation et quelques applications

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A - tI = \begin{pmatrix} 4-t & 1 & -1 \\ 2 & 5-t & -2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-3)^2(t-5)$$

1. **Etude de la valeur propre $\lambda_1 = 3$.**

$k(3) = 2$ (multiplicité algébrique de λ_1).

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \text{rg}(A - 3I) = 1 \\ \dim(E_3) = 2 = r(3) \\ r(3) = k(3) \end{cases}$$

Recherche d'une base de vecteurs propres pour E_3 . On résoud pour cela le système :

$$(A-3I)(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y-z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -a+b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2$$

$\{v_1, v_2\}$ constituent donc une base de vecteurs propres de E_3 .

2. Etude de la valeur propre $\lambda_2 = 5$.

$$k(5) = 1.$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rg}(A - 5I) = 2 \\ \dim(E_5) = 1 = r(5) \\ r(5) = k(5) \end{cases}$$

Recherche d'une base de vecteurs propres pour E_5 . On résoud pour cela le système :

$$(A-5I)(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ z = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = av_3$$

$\{v_3\}$ est une base de vecteurs propres de E_5 .

On obtient donc la matrice diagonale D semblable à A relativement à la matrice de passage P :

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad \text{et} \quad D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} u(v_1) & u(v_2) & u(v_3) \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

Application : Calcul de A^n

$$A = P.D.P^{-1} \Rightarrow A^n = P.D^n.P^{-1}$$

$$\text{Or } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} (3^n + 5^n)/2 & (-3^n + 5^n)/2 & (3^n - 5^n)/2 \\ -3^n + 5^n & 5^n & 3^n - 5^n \\ (-3^n + 5^n)/2 & (-3^n + 5^n)/2 & (3 \cdot 3^n - 5^n)/2 \end{pmatrix}$$

Application : Calcul de A^{-1}

$$A = P.D.P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/15 & -1/15 & 1/15 \\ -2/15 & 1/15 & 2/15 \\ -1/15 & -1/15 & 2/15 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - tI = \begin{pmatrix} -3-t & 1 & -1 \\ -7 & 5-t & -1 \\ -6 & 6 & -2-t \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t+2)^2(t-4)$$

Etude de la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

$k(-2) = 2$ (multiplicité algébrique de λ_1).

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \text{rg}(A + 2I) = 2 \\ \dim(E_2) = \dim(\text{Ker}(A + 2I)) = 1 \\ r(-2) \neq k(-2) \end{cases}$$

Donc A N'EST PAS DIAGONALISABLE.

Exemple 3 (dans \mathbf{R}) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A - tI = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 2 & -1-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = -(t-2)(t^2+1)$$

$P_A(t)$ ne se décompose pas dans \mathbf{R}

Donc A N'EST PAS DIAGONALISABLE dans \mathbf{R} .

1.4 Trigonalisation (triangulation)

Motivation : Soit $T = M_{\mathcal{B}}(u)$ une matrice triangulaire supérieure, représentative de l'endomorphisme u , dans une base \mathcal{B} .

Posons : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad E_i = \text{Vect}[e_1, \dots, e_i]$

$$T = \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & \cdots & \cdots & \cdots & u(e_n) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \\ & & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \bullet \\ & & & \ddots & \cdots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \bullet \end{pmatrix} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ E_n \end{array} \right.$$

Propriétés de l'endomorphisme u représenté par la matrice triangulaire supérieure : $T = M_{\mathcal{B}}(u)$

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad u(E_i) \subset E_i$ (on dit alors que E_i est stable par u)
2. $\forall i < n \quad E_i \subset E_{i+1}$

Définition 1.24 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et E' un sous-espace vectoriel de E .

E' est dit stable par u si $u(E') \subset E'$.

Définitions 1.25 :

1. Un endomorphisme u est dit trigonalisable (triangulable) ssi il existe une suite strictement croissante de $n+1$ sous-espaces stables par u telle que $E_0 = \{0\}$ et $E_n = E$ i.e. $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$. (où $E_i \neq E_{i+1}$)
2. Une matrice A est dite trigonalisable (triangulable) ssi il existe une matrice T triangulaire supérieure semblable à A

Proposition 1.26 : Soit u est un endomorphisme de E représenté dans la base \mathcal{B} de E par la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(u)$:

u est trigonalisable (triangulable) ssi $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable (triangulable).

Lemme 1.27 : Une matrice A est trigonalisable (triangulable)

ssi il existe une matrice T triangulaire inférieure semblable à A

Lemme 1.28 : Soit $\mathcal{B} = [\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\mathcal{B}_1}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\mathcal{B}_2}]$ une base de E .

Notons : $E_1 = Vect[e_1, \dots, e_p]$ et $E_2 = [e_{p+1}, \dots, e_n]$

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative, triangulaire supérieure par blocs que l'on notera :

$$A = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1), \dots, u(e_p), & u(e_{p+1}), \dots, u(e_n) \\ \boxed{A_1} & \boxed{A_3} \\ & \boxed{A_2} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

On obtient les résultats suivants :

1. $P_{A_2}(t)$ divise $P_A(t)$
Conséquences : $\{\lambda / \text{valeur propre de } A_2\} \subset \{\lambda / \text{valeur propre de } A\}$
2. E_1 est un sous-espace de E stable par u .
3. Notons u_2 l'endomorphisme de E_2 tel que $M_{\mathcal{B}_2}(u_2) = A_2$
 - (a) $\forall k \geq 1 \quad \exists w_k \in E_1 / u(e_{p+k}) = w_k + u_2(e_{p+k})$
 - (b) $\forall v \in E_2 \quad \exists w \in E_1 / u(v) = w + u_2(v)$
 - (c) $\forall v \in E_2$ vecteur propre de $u_2 \quad \exists y \in E_1 / u(v) = y + \lambda v$

(d) Si $W = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ est un vecteur propre de A_2 alors $V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in E_2$ vérifie

$$A.V = Y + \lambda V \quad \text{où } Y \in E_1.$$

Remarques : W et V représente le même vecteur de E_2 sous-espace de E ; l'un comme vecteur de E_2 dans la base \mathcal{B}_2 , l'autre comme vecteur de E dans la base \mathcal{B} .

Conséquences : Ce lemme va nous permettre d'établir d'une part la propriété caractéristique de la triangulation d'une matrice et d'autre part de justifier l'algorithme de triangulation ci-dessous.

Proposition 1.29 (caractéristique de trigonalisation (triangulation)) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$
 A est triangulable ssi son polynôme caractéristique est scindable dans K .

Corollaire 1.30 Toute matrice à coefficients dans \mathcal{C} est triangulable.

Algorithme 1.31 (de trigonalisation (triangulation)) : Soit la donnée d'une base \mathcal{B} de E , et d'une matrice $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ représentative de l'endomorphisme u .

1. On calcule $P_A(t)$ le polynôme caractéristique de A et on recherche ses racines.
 - (a) Si $P_A(t)$ n'est pas scindable, alors A n'est pas triangulable. On s'arrête.
 - (b) Sinon on le décompose. Posons en supposant que tous les λ_i sont distincts :

$$P_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \times \dots \times (\lambda_s - t)^{k_s}$$

2. Pour chaque valeur propre λ_i on détermine l'espace propre E_i associé en construisant une base \mathcal{B}_i . On obtient ainsi le système libre $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{B}_i = [v_1, \dots, v_p]$ formé de \underline{p} vecteurs propres indépendants.

(a) Si p est égal à n , \mathcal{S} est une base constituée de n vecteurs propres, donc A est diagonalisable, et on conclut en écrivant la matrice diagonale D semblable à A et la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{S} .

(b) Si $p < n$ On complète $[v_1, \dots, v_p]$ en une base de E , $\mathcal{B}_1 = [v_1, \dots, v_n]$ en utilisant les vecteurs de la base \mathcal{B}

On construit la matrice P de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_1 , et sa matrice inverse P^{-1} , ainsi que la matrice $A_1 = M_{\mathcal{B}_1}(u)$ représentative de u dans la nouvelle base \mathcal{B}_1 . On obtient alors :

$$A_1 = M_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} u(v_1) & \cdots & u(v_p) & u(v_{p+1}) & \cdots & u(v_n) \\ \lambda_1 & & 0 & \vdots & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & \lambda_p & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ & & 0 & & A' & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

★ Si $p = n - 1$, la matrice A_1 est triangulaire, elle représente le même endomorphisme u que la matrice initiale. A et A_1 sont donc semblables relativement à la matrice de passage P .

3. Sinon, si $p < n - 1$, on pose :

- $\mathcal{B}'_1 = [v_{p+1}, \dots, v_n]$
- on considère $E'_1 = \text{Vect}[v_{p+1}, \dots, v_n]$ sous-espace vectoriel de E
- on note u' l'endomorphisme de E'_1 qui est représenté par A' dans la base \mathcal{B}'_1 . On a donc $A' = M_{\mathcal{B}'_1}(u')$.

4. On travaille alors sur la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'_1}(u')$:

- on calcule son polynôme caractéristique (qui est un quotient du polynôme caractéristique P_A de la matrice initiale A)
- On détermine les valeurs propres de A' (qui forment un sous-ensemble des valeurs propres de A).
- On détermine les vecteurs propres $[w_{p+1}, \dots, w_r]$ de A' dans E'_1 (ces vecteurs auront des composantes nulles sur $[v_1, \dots, v_p]$ si on les considère comme des vecteurs de E).

5. On considère le système $\mathcal{S} = [v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_r]$

(a) si $r = n$ on pose $\mathcal{B}_2 = [v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_n]$

(b) si $r < n$ on utilise les vecteurs de la base $[v_1, \dots, v_n]$ pour compléter \mathcal{S} en une base. On note : $\mathcal{B}_2 = [v_1, \dots, v_p, w_{p+1}, \dots, w_r, w'_{r+1}, \dots, w'_n]$

On écrit $A_2 = M_{\mathcal{B}_2}(u)$ et P_2 la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_2

(a) Si A_2 est triangulaire, cette matrice qui représente le même endomorphisme u que la matrice initiale A est donc semblable à A relativement à la matrice de passage P_2 de \mathcal{B} à \mathcal{B}_2 .

(b) Si A_2 n'est pas triangulaire, alors on recommence à l'étape 3, avec $\mathcal{B}'_2 = [w'_{r+1}, \dots, w'_n]$.

1.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Définitions-Notations 1.32 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ où E désigne un espace vectoriel de dimension n sur K , et soit A une matrice carrée d'ordre n sur K .

Soit $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_k t^k$ un polynôme à coefficients dans K .

1. On pose : $u^0 = Id_E$, $u^1 = u$, $u^{i+1} = u \circ u^i$

2. $P(u)$ désigne l'endomorphisme :

$$P(u) = a_0.Id_E + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_ku^k$$

3. $P(A)$ désigne la matrice :

$$P(A) = a_0.I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k$$

Lemme 1.33 : Si $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ est la matrice représentative de u dans la base \mathcal{B} , alors $P(A)$ est la matrice représentative de $P(u)$ dans cette base. i.e. :

$$P(A) = M_{\mathcal{B}}(P(u))$$

Lemme 1.34 Soient P, Q, R des polynômes de $K[t]$, et $u \in \mathcal{L}(E)$

$$P = Q.R \implies P(u) = Q(u) \circ R(u) = R(u) \circ Q(u).$$

Théorème 1.35 (de Cayley-Hamilton) Soient K un sous-corps de \mathbb{C} , E un espace vectoriel sur K , $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$, P_u (resp. P_A) le polynôme caractéristique de u (resp. de A). Alors :

$$P_u(u) = 0 \quad \text{et} \quad P_A(A) = 0$$

Conséquences : Ce théorème a de nombreuses applications pratiques que nous verrons en exercices.

1.6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Notations 1.36 :

1. t_0 désigne un élément de \mathbf{R} .
2. I désigne un intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant t_0
3. $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice à coefficients dans $K = \mathbf{R}$ ou \mathbb{C}
4. $x, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ représentent des fonctions de I dans K , dérivables ; x'_i, y'_j , désignent les fonctions dérivées des fonctions correspondantes.
5. $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $X' = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$ des matrices colonnes à coefficients dans $\mathcal{C}^1(I, K)$ de même pour $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y' = (y'_i)_{1 \leq i \leq n}$
6. b_1, \dots, b_n sont des fonctions continues de I dans K .

Position du problème : On se propose d'étudier le système différentiel :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}x_1(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) + b_1(t) \\ x'_2(t) = a_{2,1}x_1(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}x_1(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad \text{noté } \boxed{X' = A \cdot X + B}$$

Les inconnues sont les fonctions $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et les paramètres les fonctions $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$

Proposition 1.37 Soit P une matrice à coefficients dans K , inversible ; posons :

$$Y = P^{-1}.X$$

X est solution de $X' = A.X + B \iff Y$ est solution de $Y' = P^{-1}.A.P.Y + P^{-1}.B$.

Proposition 1.38 (Rappel) : Pour tout x_0 dans K ($= \mathbf{R}$ ou \mathbb{C}), l'équation différentielle $x'(t) = \lambda.x(t) + b(t)$ a une solution et une seule telle que $x(t_0) = x_0$.

$$\text{Cette solution est : } x(t) = x_0.e^{\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} b(s) ds$$

2. Détermination de E_2 .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff (A - 2I)(X) = 0$$

On résout donc le système :

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = a \\ y = a \\ z = -a \end{cases} \implies X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a v_1$$

On obtient ainsi le vecteur propre $v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \in E_2$

3. $\dim(E_2) = 1 \neq 3$ (donc A n'est pas diagonalisable)

4. On complète le système libre $[v_1]$ pour construire une base $\mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3]$ de E , (en utilisant les vecteurs de $\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3]$). On pose :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ v_2 = e_1 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = v_2 \\ e_2 = v_3 \\ e_3 = -v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

5. On calcule $A_1 = M_{\mathcal{B}_1}(u)$ la matrice représentative de u dans la base \mathcal{B}_1

$$\begin{cases} u(v_1) = & = 2v_1 \\ u(v_2) = u(e_1) = 2e_1 - 2e_2 = 2v_2 - 2v_3 \\ u(v_3) = u(e_2) = e_1 + 3e_2 - e_3 = v_1 + 2v_3 \end{cases} \quad \text{D'où :}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_1}(u) \quad \text{où } \mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3]$$

6. On travaille maintenant sur $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = M_{[v_2, v_3]}(u')$.

(a) $P_{A'}(t) = (t - 2)^2$

(b) Recherche des vecteurs propres de A' en résolvant $(A' - 2I)(Y) = 0$ et en posant : $Y =$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ On obtient donc : } \begin{cases} 0 = 0 \\ 2y + 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = a \end{cases} \implies$$

$$Y = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{On peut donc considérer le vecteur } w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_3$$

(c) On complète le système libre $[v_1, w_2]$ pour construire la base $\mathcal{B}_2 = [w_1, w_2, w_3]$ de E , en utilisant les vecteurs de $\mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3]$. On pose :

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_3 \\ w_3 = v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_3 \\ v_3 = w_2 \end{cases}$$

(d) On calcule $A_2 = M_{\mathcal{B}_2}(u)$ la matrice représentative de u dans la base \mathcal{B}_2

$$\begin{cases} u(w_1) = u(v_1) = 2v_1 = 2w_1 \\ u(w_2) = u(v_3) = v_1 + 2v_3 = w_1 + 2w_2 \\ u(w_3) = u(v_2) = 2v_2 - 2v_3 = -2w_2 + 2w_3 \end{cases} \quad \text{D'où :}$$

$$A_2 = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_2}(u) \quad \text{où } \mathcal{B}_2 = [w_1, w_2, w_3]$$

7. La matrice triangulaire semblable à A que nous venons de construire est la matrice $T = A_2$, relativement à la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_2 :

$$\begin{cases} w_1 = v_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ w_2 = v_3 = e_2 \\ w_3 = v_2 = e_1 \end{cases} \implies P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 15 & 10 \\ -3 & 8 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & -6 \\ 5 & 8 & 13 & 18 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(u) \quad \text{où } \mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$$

1. On calcule et factorise le polynôme caractéristique de B :

$P_B(t) = \det(B - tI) = (t - 16)(t - 8)^3$. B possède comme valeurs propres $\lambda_1 = 16$, et $\lambda_2 = 8$.

P_B est scindable, donc B est au moins trigonalisable (triangulable).

2. Détermination de E_{16} .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \in E_{16} \iff (B - 16I)(X) = 0$$

On résoud donc le système :

$$\begin{cases} -x + 12y + 15z + 10h = 0 \\ -3x - 8y + 5z + 2h = 0 \\ -x - 4y - 17z - 6h = 0 \\ 5x + 8y + 13z + 2h = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3a \\ y = a \\ z = a \\ h = -3a \end{cases} \implies$$

$$X = a \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = av_1$$

On obtient ainsi le vecteur propre $v_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 - 3e_4 \in E_{16}$

3. Détermination de E_8 .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \in E_8 \iff (B - 8I)(X) = 0$$

On résoud donc le système :

$$\begin{cases} 7x + 12y + 15z + 10h = 0 \\ -3x + 5z + 2h = 0 \\ -x - 4y - 9z - 6h = 0 \\ 5x + 8y + 13z + 10h = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = a \\ h = -a \end{cases} \implies X = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = av_2$$

On obtient ainsi le vecteur propre $v_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \in E_8$

4. $\dim(E_8) = 1 \neq 3$ (donc A est trigonalisable (triangulable), non diagonalisable)

5. On complète le système libre $[v_1, v_2]$ pour construire la base $\mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ de E, (en utilisant les vecteurs de $\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$). On pose :

$$\begin{cases} v_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 - 3e_4 \\ v_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \\ v_3 = e_3 \\ v_4 = e_4 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = -1/2v_1 - 1/2v_2 + v_3 - 2v_4 \\ e_2 = -1/2v_1 - 3/2v_2 + 2v_3 - 3v_4 \\ e_3 = v_3 \\ e_4 = v_4 \end{cases}$$

6. On calcule $B_1 = M_{\mathcal{B}_1}(u)$ la matrice représentative de u dans la nouvelle base \mathcal{B}_1

$$\begin{cases} u(v_1) = & = 16v_1 \\ u(v_2) = & = 8v_2 \\ u(v_3) = u(e_3) = 15e_1 + 5e_2 - e_3 + 13e_4 = -10v_1 - 15v_2 + 24v_3 - 32v_4 \\ u(v_4) = u(e_4) = 10e_1 + 2e_2 - 6e_3 + 18e_4 = -6v_1 - 8v_2 + 8v_3 - 8v_4 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } B_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & 8 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & 24 & 8 \\ 0 & 0 & -32 & -8 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_1}(u) \quad \text{où } \mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3, v_4]$$

7. On travaille maintenant sur $B'_1 = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ -32 & -8 \end{pmatrix} = M_{[v_3, v_4]}(u')$.

(a) $P_{B'_1}(t) = (t - 8)^2$

(b) Recherche des vecteurs propres de B'_1 en résolvant $(B'_1 - 2I)(Y) = 0$ et en posant : $Y =$

$$\begin{pmatrix} z \\ h \end{pmatrix} \text{ on a donc } \begin{cases} 16z + 8h = 0 \\ -32z - 16h = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = a \\ h = -2a \end{cases} \implies$$

$$Y = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Considérons le vecteur } w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = v_3 - 2v_4$$

- (c) On complète le système libre $[w_1, w_2, w_3]$ pour construire une base de E
 $\mathcal{B}_2 = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, en utilisant les vecteurs de $\mathcal{B}_1 = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. On pose :
- $$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 \\ w_3 = v_3 - 2v_4 \\ w_4 = v_4 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \\ v_3 = w_3 + 2w_4 \\ v_4 = w_4 \end{cases}$$

- (d) On calcule $A_2 = M_{\mathcal{B}_2}(u)$ la matrice représentative de u dans la base \mathcal{B}_2

$$\begin{cases} u(w_1) = u(v_1) = 16w_1 \\ u(w_2) = u(v_2) = 8w_1 \\ u(w_3) = u(v_3 - 2v_4) = 2v_1 + v_2 + 8v_3 - 16v_4 = 2w_1 + w_2 + 8w_3 \\ u(w_4) = u(v_4) = -6v_1 - 8v_2 + 8w_3 + 8w_4 = -6w_1 - 8w_2 + 8w_3 + 8w_4 \end{cases} \quad \text{D'où :}$$

$$B_2 = T = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_2}(u) \text{ où } \mathcal{B}_2 = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

8. La matrice triangulaire semblable à B que nous venons de construire est la matrice $T = B_2$, relativement à la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_2 :

$$\begin{cases} w_1 = v_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 - 3e_4 \\ w_2 = v_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \\ w_3 = v_3 - 2v_4 = e_3 - 2e_4 \\ w_4 = v_4 = e_4 \end{cases} \implies P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Application au calcul des puissances de la matrice A de l'exemple 1

Reprenons les résultats obtenus à l'exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } T = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{et} \quad A = P \cdot T \cdot P^{-1} \implies \boxed{A^n = P \cdot T^n \cdot P^{-1}}$$

Remarque : $T = 2I + N$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0$$

Donc N est nilpotente d'ordre 3. et N et I vérifie $N \cdot I = I \cdot N = N$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} T^n &= (2I + N)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot N^k \cdot (2I)^{n-k} = C_n^0 \cdot N^0 \cdot 2^{n-0} \cdot I + C_n^1 \cdot N^1 \cdot 2^{n-1} \cdot I + C_n^2 \cdot N^2 \cdot 2^{n-2} \cdot I \\ &= 2^n I + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & -n(n-1) 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & -n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = P \cdot T^n \cdot P^{-1} =$$

Chapitre 2

Espace dual

2.1 Dual d'un espace E

E désigne un espace vectoriel sur un corps K, de dimension finie égale à n.

Définitions 2.1 (Dual d'un espace vectoriel) :

1. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire φ de E dans K.
2. L'espace vectoriel des formes linéaires, est appelé dual de E et est noté E^* .

Exemples : Formes linéaires :

1. $E = \mathcal{M}_n(K)$, $\varphi(M) = \text{Tr}(M)$
2. $E = K[X]$, $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt$
3. $E = K[X]$, $\varphi(P) = a_0$, où $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi(v) = ax + by + cz$, où $v = (x, y, z)$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi(v) = x$, où $v = (x, y, z)$

Proposition 2.2 :

1. Si φ est une forme linéaire non nulle, alors elle est surjective.
2. $\forall \varphi \in E^*$ ($\varphi \neq 0 \implies \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n - 1$)
3. $\forall \varphi \in E^*$ $\forall x_0 \in E$ $\varphi(x_0) \neq 0 \implies E = K.x_0 \oplus \text{Ker}(\varphi)$.

Proposition 2.3 : Soient $\varphi, \varphi' \in E^*$.

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi') \implies \exists k \in K \quad \varphi = k\varphi'$$

Définition 2.4 Le noyau d'une forme linéaire est appelé un hyperplan.

Proposition 2.5 : Soit $x_0 \in E$ $x_0 \neq 0 \implies (\exists \varphi \in E^* \quad \varphi(x_0) \neq 0)$

Corollaire 2.6 : Soit $x_0 \in E$ $(\forall \varphi \in E^* \quad \varphi(x_0) = 0) \implies x_0 = 0$

2.2 Bases duales

Proposition-Définition 2.7 (Base duale) : Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$, une base de E. Considérons les formes ε_i suivantes pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i : E &\longrightarrow K \\ v &\longmapsto x_i \quad \text{si } v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ε_i est une forme linéaire.
2. $\boxed{\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \varepsilon_i(e_j) = \delta_{i,j}}$ $= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
3. $(\varepsilon_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont appelées **les formes coordonnées** sur \mathcal{B}
4. $\mathcal{B}^* = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ est une base de \mathcal{B}
5. \mathcal{B}^* est appelée **la base duale** de \mathcal{B} .
6. Soit $\varphi \in E^*$ $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)\varepsilon_i$
7. Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \varepsilon_i$, alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\varphi_i = \varphi(e_i)$
8. Si $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$ sont les colonnes représentatives de v et φ dans les bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}^* alors

$$\varphi(v) = {}^t V \Phi = {}^t \Phi V = \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \dots + \varphi_n x_n$$

Proposition 2.8 :

$$\dim(E^*) = \dim(E)$$

Proposition 2.9 (Changement de base) : Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , \mathcal{B}^* et \mathcal{B}'^* leurs duales et soient P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et Q la matrice de passage de \mathcal{B}^* à \mathcal{B}'^* alors

$$Q = {}^t P^{-1}$$

Proposition 2.10 : Soient \mathcal{B} une base de E , et \mathcal{B}^* sa base duale, soit $\mathcal{C} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ une autre base de E^* .

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Il existe $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_n]$, base de E , telle que $\mathcal{A}^* = \mathcal{C}$.i.e. telle que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi_j(a_i) = \delta_{i,j}$$

2. Si Q est la matrice de passage de \mathcal{B}^* à \mathcal{C} alors $P = {}^t(Q^{-1})$ est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{A}

Exemple : Soient $E = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3]$ une base de E et \mathcal{B}^* sa base duale dans E^* . Soit $\mathcal{C} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ une autre base de E^*

On recherche la base \mathcal{A} , telle que $\mathcal{A}^* = \mathcal{C}$

Pour cela on cherche la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{A}

Notons (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur v dans la base \mathcal{B} .

Considérons \mathcal{C} définie par :

$$\begin{cases} \varphi_1(v) = x - y - z \\ \varphi_2(v) = 2x - y - z \\ \varphi_3(v) = 3y + 2z \end{cases} \implies Q = M_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} \implies$$

$$P = {}^t(Q^{-1}) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \implies \boxed{\begin{cases} a_1(v) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \\ a_2(v) = e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ a_3(v) = e_2 - e_3 \end{cases}}$$

Chapitre 3

Formes Biliéaires et Formes Quadratiques

3.1 Formes bilinéaires

Définition 3.1 (Rappels) :

1. Une forme bilinéaire b est une application du produit $E \times F$ de K -espaces vectoriels, à valeurs dans K , qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables. i.e. :
 - $\forall v, v' \in E^2 \quad \forall w \in F \quad \forall \lambda, \mu \in K^2 \quad b(\lambda v + \mu v', w) = \lambda b(v, w) + \mu b(v', w)$
 - $\forall v \in E \quad \forall w, w' \in F^2 \quad \forall \lambda, \mu \in K^2 \quad b(v, \lambda w + \mu w') = \lambda b(v, w) + \mu b(v, w')$
2. Une forme bilinéaire b sur $E \times E$ est symétrique ssi

$$\forall v, w \in E^2 \quad b(v, w) = b(w, v)$$
3. Une forme bilinéaire b sur $E \times E$ est antisymétrique ssi

$$\forall v, w \in E^2 \quad b(v, w) = -b(w, v)$$

Exemples :

1. Le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^3 , noté b , défini par :

$$v = (x, y, z) \text{ et } v' = (x', y', z') \implies b(v, v') = xx' + yy' + zz'$$
2. Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$, base de E , et $\mathcal{C} = [c_1, \dots, c_m]$, base de F
 Soient $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $w = y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3$ et
 soit $b : E \times F \longrightarrow K$, définie par : $b(v, w) = 2x_1y_2 + 7x_2y_3 - x_3y_4$
3. Forme bilinéaire canonique sur E

$$b : E \times E^* \longrightarrow K$$

$$(x, \varphi) \longmapsto \varphi(x)$$
4. Soit $E = \mathcal{M}_{n \times m}(K)$

$$b : E \times E \longrightarrow K$$

$$(M, N) \longmapsto \text{Tr}({}^t M.N)$$
5. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$

$$b : E \times E \longrightarrow K$$

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Proposition 3.2 (Expression d'une forme bilinéaire relativement à des bases.) Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E , et $\mathcal{C} = [c_1, \dots, c_m]$ une base de F .
 Soit $b : E \times F \longrightarrow K$ une forme bilinéaire.
 Posons : $\forall i_{1 \leq i \leq n} \quad \forall j_{1 \leq j \leq m} \quad \alpha_{i,j} = b(e_i, c_j)$.

Pour tous $v \in E$ et $w \in F$:

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad w = \sum_{j=1}^m y_j c_j \implies b(v, w) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} b(e_i, c_j) x_i y_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \alpha_{i,j} x_i y_j$$

Proposition-Définition 3.3 : Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E, et $\mathcal{C} = [e'_1, \dots, e'_m]$ une base de F.

Définissons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, , pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ les formes suivantes :

$$b_{i,j} : E \times F \longrightarrow K \\ (v, w) \longmapsto x_i y_j \quad \text{si } v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ et } w = \sum_{j=1}^m y_j e_j$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad b_{i,j}$ est une forme bilinéaire
2. $\forall i, k \in \{1, \dots, n\}, \forall j, l \in \{1, \dots, m\}, \quad b_{i,j}(e_k, e'_l) = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$
3. $(b_{i,j})_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}}$ est une base de $\mathcal{L}_2(E, F; K)$. (dite base canonique).

Corollaire 3.4 :

Si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$ alors $\dim(\mathcal{L}_2(E, F; K)) = n \times m$

Définition 3.5 (Représentation matricielle d'une forme bilinéaire) :

Soit $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E et $\mathcal{B}' = [e'_1, \dots, e'_m]$ une base de F.

Soit b une forme bilinéaire sur $E \times F$, alors :

1. La matrice représentative de b relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est :

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(b) = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad \text{où } \forall i, j \quad b_{i,j} = b(e_i, e'_j)$$

2. Si V et W sont les vecteurs colonnes représentatifs des vecteurs v et w dans les bases respectives \mathcal{B} , et \mathcal{B}' , alors :

$$b(v, w) = {}^t V M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(b) W$$

Notation : Si $E = F$ et si b est bilinéaire sur E, alors on notera $B = M_{\mathcal{B}}(b)$.

Exemple dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$: Soit la forme bilinéaire b définie par

$b(v, v') = x_1 x'_1 + 2x_1 x'_2 - x_2 x'_1 + 3x_2 x'_2$ où (x_1, x_2) , resp. (x'_1, x'_2) représentent les coordonnées de v et v' dans la base canonique de \mathbf{R}^2 , alors :

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Si b est bilinéaire symétrique, alors $M_{\mathcal{B}}(b)$ est symétrique.

Proposition 3.6 (Changement de bases) : Soient b une forme bilinéaire sur $E \times F$, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E, et soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F.

Soient $B = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(b)$ et $B' = M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(b)$ les matrices représentatives de b .

Soient P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et Q la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}'

$$B' = {}^t P B Q$$

Définition 3.7 : Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est non dégénérée ssi

$$\begin{cases} (\forall v \in E \quad b(v, w) = 0) \implies w = 0 & \text{et} \\ (\forall w \in F \quad b(v, w) = 0) \implies v = 0 \end{cases}$$

Exemples : Reprenons les exemples de formes bilinéaires cités ci-dessus

1. Le produit scalaire sur \mathbf{R}^3 est une forme bilinéaire non dégénérée
2. La forme bilinéaire de l'exemple 2- est dégénérée
3. Celles des exemples 3-, 4-, 5- sont des formes bilinéaires non dégénérées

Proposition 3.8 (Isomorphisme entre F et E^*) :

Soit $b : E \times F \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée. Définissons :

$$\Phi_1 : E \longrightarrow F^* \quad \text{et} \quad \Phi_2 : F \longrightarrow E^* \\ v \longmapsto b_v^1 \quad \text{tel que } b_v^1(w) = b(v, w) \quad \text{et} \quad w \longmapsto b_w^2 \quad \text{tel que } b_w^2(v) = b(v, w)$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Φ_1 et Φ_2 sont des formes linéaires injectives.
2. $\dim(E) = \dim(F)$.
3. Φ_1 et Φ_2 sont des isomorphismes
4. $\forall \varphi \in E^* \quad \exists w$ unique $\varphi = b_w^2$ (i.e. tel que $\forall v \in E \quad \varphi(v) = b(v, w)$)

Conséquence : On se limitera donc pour les formes bilinéaires non dégénérées à celles définies sur $E \times E$

Définition 3.9 : Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée, symétrique

1. $v \in E$ et $w \in E$ sont orthogonaux pour b ssi $b(v, w) = 0$
2. Soit $A \subset E \quad \boxed{A^\perp} = \{w \in E / \forall v \in A \quad b(v, w) = 0\}$ (l'orthogonal de A)

Propositions 3.10 : Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire non dégénérée

1. Pour tout $A \subset E$, A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
2. Pour tout $A \subset E$, $A \subset A^{\perp\perp}$

Propositions 3.11 : Soit E' un sous-espace vectoriel de E , et b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Si $\dim(E) = n$ et $\dim(E') = p$ alors :

1. $\dim(E'^\perp) = n - p$
2. $E'^{\perp\perp} = E'$

Dans ce chapitre, \mathbf{K} désigne un corps de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur \mathbf{K} .

3.2 Formes quadratiques

Définition 3.12 (forme quadratique sur E) : Une application $q : E \longrightarrow K$ est appelée une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire $b : E \times E \longrightarrow K$ telle que

$$\boxed{\forall v \in E \quad q(v) = b(v, v)}$$

Lemme 3.13 L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel.

Exemple : $E = \mathbf{R}$. Définissons q par : $q(v) = x^2 + y^2 - 4xy$ si $v = (x, y)$

On peut prendre pour forme bilinéaire définissant q :

- $b_1(v, v') = xx' + yy' - 3x'y - xy'$. On a bien $q(v) = b_1(v, v)$
- $b_2(v, v') = xx' + yy' - 2x'y - 2xy'$. On a bien $q(v) = b_2(v, v)$ mais de plus b_2 est symétrique.

Lemme 3.14 Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E et $i \in \{1, \dots, n\}$

- Soit q_i définie par : $q_i(v) = x_i^2$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$; q_i est une forme quadratique
- Soit $q_{i,j}$ (pour $i \neq j$) définie par : $q_{i,j}(v) = x_i x_j$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$; $q_{i,j}$ est une forme quadratique

★ *Preuve :* q_i est définie par la forme bilinéaire b_i telle que :

$$b_i(v, w) = x_i y_i \quad \text{si } v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et si } w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

$q_{i,j}$ est définie par : $b_{i,j}(v, w) = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$ sous les mêmes hypothèses.

Lemme 3.15 : Si q est une forme quadratique, alors : $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

Proposition 3.16 (Expression d'une forme quadratique relativement à une base)

Soient $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E ; notons $(\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ des familles de scalaires appartenant à K , $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $w = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ des vecteurs de E ; enfin q désignera la forme quadratique associée à la forme bilinéaire b définie par : $b(v, w) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \beta_{i,j} x_i y_j$ alors

1. $q(v) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \beta_{i,j} x_i x_j$ est un polynôme homogène de degré 2
2. Si $P(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme homogène de degré 2 alors la forme q définie par : $q(v) = P(x_1, \dots, x_n)$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est une forme quadratique .

Proposition-Définition 3.17 : Soit q une forme quadratique sur E .

1. Il existe une et une seule forme bilinéaire symétrique b_q définissant q (i.e. telle que $\forall v \in E \quad q(v) = b_q(v, v)$).
2. La forme polaire de q est la forme bilinéaire symétrique b_q définissant q
3. Soit b_q la forme polaire de la forme quadratique q

$$\forall v, w \in E \quad b_q(v, w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)]$$

Règle de dédoublement des termes :

Soit $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E . Soit q la forme quadratique définie dans cette base par : $q(v) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

si $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et si $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors $b_q(v, w)$ s'obtient à partir de $q(v)$ en remplaçant :

- chaque terme x_i^2 par $x_i y_i$
- chaque terme $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.

Exemple sur \mathbf{R}^3 : Soit $q(v) = x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 3xz + 6yz$ si $v = (x, y, z)$

Alors $b_q(v, v') = xx' + yy' - zz' + 2(xy' + x'y) - \frac{3}{2}(xz' + x'z) + 3(y'z + yz')$ si $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$.

On vérifie que : $\forall v \in \mathbf{R}^3 \quad q(v) = b(v, v)$.

Définition 3.18 : Soit \mathcal{B} une base de E .

La matrice $M_{\mathcal{B}}(q)$ représentative de la forme quadratique q est la matrice représentative de sa forme polaire :

$$M_{\mathcal{B}}(q) = M_{\mathcal{B}}(b_q)$$

Exemple sur \mathbf{R}^2 : Soit $q(v) = x^2 + y^2 - 4xy$ si $v = (x, y)$.

Alors $b_q(v, v') = xx' + yy' - 2(xy' + x'y)$ si $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$.

et
$$M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Conséquence 3.19 (Ecriture matricielle d'une forme quadratique) : Si V désigne le vecteur colonne représentatif de v dans \mathcal{B} , Q la matrice représentative de q dans \mathcal{B}

$$q(v) = {}^t V Q V$$

Lemme 3.20 (Changement de base) : Soient $P = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , $Q = M_{\mathcal{B}}(q)$ et $Q' = M_{\mathcal{B}'}(q)$ alors

1. $Q' = {}^t P Q P$

$$2. \operatorname{rg}(Q') = \operatorname{rg}(Q)$$

Définitions 3.21 : Soit b_q la forme polaire de la forme quadratique q et $Q = M_{\mathcal{B}}(b_q)$.

1. q est non dégénérée ssi b_q est non dégénérée
2. $\operatorname{rg}(q) \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{rg}(b_q) \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{rg}(Q)$

Lemme 3.22 : Soit b_q la forme polaire de la forme quadratique q et $Q = M_{\mathcal{B}}(b_q)$.

1. $\operatorname{rg}(q)$ est indépendant de la base choisie.
2. q est non dégénérée ssi $\operatorname{rg}(q) = n (= \dim(E))$

Définition 3.23 (forme quadratique définie) : Soit q une forme quadratique sur E

1. $v \in E$ est dit isotrope ssi $q(v) = 0$.
2. q est une forme quadratique définie ssi q n'a pas de vecteur isotrope non nul ssi $\forall v \in E \quad q(v) = 0 \implies v = 0$
3. q est dite définie positive ssi $\forall v \neq 0 \quad q(v) > 0$
4. q est dite définie négative ssi $\forall v \neq 0 \quad q(v) < 0$

Proposition 3.24 : Soit q une forme quadratique sur E
Si q est définie alors q est non dégénérée

Proposition 3.25 : Soit E est de dimension finie et E' un sous-espace vectoriel de E .
Si q est une forme quadratique définie alors :

$$E = E' \oplus E'^{\perp}$$

Définition 3.26 : Soit q une forme quadratique sur E , et soit une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E

1. $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale (pour q) ssi $\forall i, j \in I \quad i \neq j \implies b_q(e_i, e_j) = 0$
2. $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée (pour q) ssi elle est orthogonale pour q et si de plus $\forall i \in I \quad b_q(e_i, e_i) = 1$.

Proposition 3.27 : Soit q une forme quadratique sur E les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Toute famille orthonormée pour q est libre.
2. Si q est définie alors toute famille ne contenant pas 0 et orthogonale pour q est libre.

Définition 3.28 :

1. Une famille orthogonale (pour q) qui est une base est appelée base orthogonale (pour q).
2. Une famille orthonormée (pour q) qui est une base est appelée base orthonormée (pour q).

Proposition 3.29 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base de E et $\mathcal{B}^* = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ sa base duale. Soit q une forme quadratique sur E
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{B} est une base orthogonale pour q .
2. La matrice de q dans \mathcal{B} est diagonale.

$$M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$3. v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Proposition 3.35 : Pour toute forme quadratique q l'algorithme de Gauss fournit une décomposition en somme de carrés indépendants.

Algorithme 3.36 (Construction d'une base orthogonale pour q) :

On se donne q par son expression dans la base $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$, et on notera $\mathcal{B}^* = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ la base duale de \mathcal{B} .

1. On décompose q en somme de carrés indépendants par l'algorithme de Gauss. On obtient ainsi r formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ linéairement indépendantes dans \mathcal{B}^* telle que $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i^2$.
2. Si nécessaire (i.e. si $r \neq n$), on complète le système $[\varphi_1, \dots, \varphi_r]$ en utilisant les vecteurs de \mathcal{B}^* pour obtenir une base de E notée : $\mathcal{C} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$
3. On écrit la matrice de passage $P_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}}$

$$P_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

4. On recherche \mathcal{A} base de E telle que $\mathcal{C}^* = \mathcal{A}$, en calculant la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{A} :

$$Q_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = {}^t(P^{-1}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

5. On termine en écrivant la matrice diagonale représentative de q dans cette base orthogonale.

$$M_{\mathcal{A}}(b_q) = M_{\mathcal{A}}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Conséquences :

- $\begin{cases} \forall i, j & \varphi_i(a_j) = \delta_{i,j} & \text{car } \mathcal{C} \text{ est la base duale de } \mathcal{A} \\ \forall i \neq j & b_q(a_i, a_j) = 0 & \text{car } M_{\mathcal{A}}(b_q) \text{ est diagonale} \\ [a_1, \dots, a_n] \text{ est orthogonale} & & \text{(se déduit de la proposition précédente).} \end{cases}$
- Si (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) sont les coordonnées respectives de v et w dans la base \mathcal{A} alors

$$\begin{cases} \varphi_i(v) & = & X_i & & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ q(v) & = & \lambda_1 X_1^2 & + & \lambda_2 X_2^2 & + & \dots & + & \lambda_r X_r^2 \\ b(v, w) & = & \lambda_1 X_1 Y_1 & + & \lambda_2 X_2 Y_2 & + & \dots & + & \lambda_r X_r Y_r \end{cases}$$
- Si $r = n$ et si tous les coefficients λ_i sont positifs, alors q est définie positive et on peut à partir de la base orthogonale $\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_n]$ construire une base orthonormée $\mathcal{A}' = [a'_1, \dots, a'_n]$ en posant : $a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{q(a_i)}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemples : A voir en exercices

Corollaire 3.37 : *Tout espace vectoriel possédant une forme quadratique q définie positive possède une base orthonormée pour q*

Proposition-Définition 3.38 (Loi d'inertie de Sylvester) : *Si q est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel, il existe deux entiers s et t , ne dépendant que de q tels que dans toute décomposition de q en somme de carrés indépendants, $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \varphi_i^2$, il y ait exactement s coefficients λ_i positifs et exactement t négatifs vérifiant $r=s+t$.*

Le couple (s, t) est appelé la signature de q , et est noté : $\sigma(q)$.

Proposition 3.39 : *Soit q une forme quadratique sur E de dimension n , et $\sigma(q) = (s, t)$ sa signature.*

- q est non dégénérée ssi $s+t = n$
- q est définie ssi $s = n$ ou $t=0$
- q est définie positive ssi $\sigma(q) = (n, 0)$
- q est définie négative ssi $\sigma(q) = (0, n)$

Exemples sur \mathbf{R}^4 : Notons $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$

$$q_1(v) = x^2 + 2y^2 + 3t^2 \text{ est dégénérée (donc non définie)}$$

$$q_2(v) = x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 3t^2 \text{ est non dégénérée mais non définie}$$

$$q_3(v) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 3t^2 \text{ est définie (positive) donc non dégénérée}$$

$$q_4(v) = -x^2 - 2y^2 - 5z^2 - 3t^2 \text{ est définie (négative) donc non dégénérée}$$

Chapitre 4

Espaces Euclidiens

4.1 Produit scalaire, norme

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel.

4.1.1 Premières définitions

Définition 4.1 (Produit scalaire) : La forme bilinéaire associée à une forme quadratique définie positive sur E un \mathbf{R} -espace vectoriel est appelée produit scalaire.

Notation : On notera $\langle v | w \rangle$ au lieu de $b_q(v, w)$

Exemples :

- Sur \mathbf{R}^n $\langle v | w \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$
où $v = (x_1, \dots, x_n)$ et $w = (y_1, \dots, y_n)$
- Sur $\mathbf{R}_n[X]$ $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ où P, Q sont des polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$

Définition 4.2 (Espace euclidien) Un espace euclidien est un espace vectoriel réel sur lequel est défini un produit scalaire $\langle | \rangle$.

Définition 4.3 (Norme) : Une application $N : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ est appelée norme sur E si elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

- 1- $N(v) = 0 \implies v = 0$
- 2- $\forall v \in E \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad N(\lambda v) = |\lambda| \cdot N(v)$
- 3- $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

Exemples :

- Sur \mathbf{R}^n
 $N_2(v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ où $v = (x_1, \dots, x_n)$
 $N_\infty(v) = \text{Sup}_i |x_i|$
 $N_1(v) = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- Sur $\mathbf{R}_n[X]$ $N(P) = \sqrt{\int_0^1 P^2(t)dt}$ où P est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$

Définition 4.4 ("Norme" dérivée d'un produit scalaire $\|-\|$) :

Soit $(E, \langle | \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, on définit l'application $\|-\|$ par :

$$\begin{aligned} \|-\| : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ v &\longmapsto \|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle} \end{aligned}$$

4.1.2 Inégalité de Schwarz, de Minkowski

Proposition 4.5 (Inégalité de Schwarz) : Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

$$\forall v, w \in E \quad |\langle v | w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

l'égalité n'ayant lieu que si v et w sont proportionnels.

Proposition 4.6 (Inégalité de Minkowski) : Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

$$\forall v, w \in E \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

4.1.3 Propriétés de la norme dérivée du produit scalaire

Proposition-Définition 4.7 : Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

1. L'application $\|-\|$, dérivée d'un produit scalaire est une norme sur E .
2. L'application $\|-\|$ est appelée la norme (euclidienne) dérivée du produit scalaire.

Exemples :

- Sur \mathbb{R}^n N_2 est une norme euclidienne, mais N_∞ n'est pas une norme euclidienne.

Proposition 4.8 : Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien, et

$\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base orthonormée de E . Posons $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

$$- \langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$- \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$- \forall i \quad x_i = \langle v | e_i \rangle.$$

$$- \langle v | w \rangle = {}^t V \cdot W \quad \text{où } V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

4.1.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Proposition 4.9 (Rappel) : Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien.

E admet une base orthonormée

But : On se propose d'établir un algorithme différent de celui déjà vu dans l'étude des formes quadratiques. Cet algorithme sera spécifique aux espaces vectoriels euclidiens.

Proposition 4.10 (Rappel) : Soient E un espace vectoriel quelconque.

Si $[e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n]$ sont linéairement indépendants

et si $a_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i$ (*)

alors $[e_1, \dots, e_{k-1}, \frac{a_k}{\|a_k\|}, e_{k+1}, \dots, e_n]$ sont linéairement indépendants

Algorithme 4.11 :

Partant d'une base quelconque $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$, on lui applique pas à pas une transformation du type (*) de la proposition précédente telle qu'à l'étape k , les k premiers vecteurs soient orthonormés.

Soit $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base quelconque de E .

$$\begin{aligned} [e_1, \dots, e_n] &\gg [e'_1, e_2, \dots, e_n] && \text{où } e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \\ &\gg \dots \\ &\gg [e'_1, \dots, e'_k, e_{k+1}, \dots, e_n] && \text{où } \{e'_1, \dots, e'_k\} \text{ sont orthonormés} \\ &\gg [e'_1, \dots, e'_k, e'_{k+1}, \dots, e_n] && \text{où } \begin{cases} a_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1} | e'_i \rangle e'_i \\ e'_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|} \end{cases} \\ &\gg \dots \\ &\gg [e'_1, \dots, e'_k, e'_{k+1}, \dots, e'_n] \end{aligned}$$

Proposition 4.12 : Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliquée à une base quelconque $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ construit une base orthonormée $\mathcal{B}' = [e'_1, \dots, e'_n]$.

Corollaire 4.13 : Si $\mathcal{S} = [e_1, \dots, e_p]$ est un système libre de vecteurs orthonormés, on peut compléter le système \mathcal{S} pour obtenir une base orthonormée commençant par $[e_1, \dots, e_p]$

4.1.5 Diagonalisation dans un espace euclidien

Lemme 4.14 : Soient E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Le polynôme caractéristique de u scindé dans \mathbb{C} n'a que des racines réelles
2. Tout sous-espace stable par u a son orthogonal stable par u

Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

4.2 Endomorphisme adjoint

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Lemme 4.15 (Propriété du produit scalaire) Rappel

$$\forall y, z \quad (y = z \iff \forall x \quad \langle x | y \rangle = \langle x | z \rangle)$$

Proposition-Définition 4.16 (application transposée) : Soient $(E, \langle - | - \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un et un seul endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (noté u^*) tel que :

$$\forall x \forall y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$$

u^* est appelée l'adjoint de u

Corollaire 4.17 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soient $y, z \in E$.

$$(\forall x \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | z \rangle) \implies z = u^*(y)$$

Proposition 4.18 Soit $\mathcal{B} = [e_1, \dots, e_n]$ une base orthonormée de E . Soit A la matrice représentative de u et A^* celle de u^* dans la base \mathcal{B} .

$$M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t(M_{\mathcal{B}}(u))$$

Proposition 4.19 Soit u, v des endomorphismes de E et soit λ un scalaire de K .

1. $u^{**} = u$ $(Id)^* = Id$
2. $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
3. $\text{rang}(u^*) = \text{rang}(u)$, $\det(u^*) = \det(u)$

4.3 Groupe Orthogonal

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Définition 4.20 (Endomorphisme orthogonal (isométrie)) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est dit orthogonal (une isométrie) ssi il vérifie : $\forall x \forall y \in E \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

Proposition 4.21 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$u \text{ est orthogonal} \iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \langle u(e_i) | u(e_j) \rangle = \langle e_i | e_j \rangle$$

$$\iff \forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

$$\iff \underline{u^* \cdot u = Id_E}$$

$$\iff u \text{ est inversible et } \underline{u^{-1} = u^*}$$

$$\iff \text{l'image par } u \text{ d'une base orthonormée } \mathcal{B} \text{ (notée } u(\mathcal{B}) \text{) est une base orthonormée .}$$

Définition 4.22 (Matrice orthogonale) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

$$A \text{ est dite orthogonale} \quad \text{ssi} \quad {}^t A \cdot A = I_n \quad \text{ssi} \quad {}^t A \cdot A = I_n$$

Proposition 4.23 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E

$$u \text{ est orthogonal} \quad \text{ssi} \quad M_{\mathcal{B}}(u) \text{ est orthogonale}$$

Proposition 4.24 : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

1. A est orthogonale ssi ${}^t A$ est orthogonale
2. A est orthogonale ssi les vecteurs colonnes (resp. les vecteurs lignes) de A constituent une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de \mathbf{R}^n .

Théorème 4.25 .

Dans un espace vectoriel euclidien, la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée est orthogonale

Proposition 4.26 : Soit u un endomorphisme orthogonal de E .

1. $\det(u) = \pm 1$.
2. Les valeurs propres de u valent ± 1 .
3. Tout sous-espace stable par u a son orthogonal stable par u .

Corollaire 4.27 : Soit u un endomorphisme orthogonal de E , et $P_u(t)$ son polynôme caractéristique.

1. u est diagonalisable ssi $\exists p, q \in \mathbf{N} \quad P_u(t) = (1 - t)^p (-1 - t)^q$
2. Si u est diagonalisable alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Définition 4.28 (Rotation) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u est appelé une rotation si u est orthogonal et si $\det(u) = 1$.

Propositions-Définitions 4.29 .

1. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E , appelé le groupe orthogonal de E ; il est noté $\mathcal{O}(E)$.
2. L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{O}(E)$ dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal ; il est noté $\mathcal{SO}(E)$
3. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, appelé le groupe orthogonal de \mathbf{R}^n ; il est noté $\mathcal{O}(n)$.
4. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ appelé groupe spécial orthogonal de \mathbf{R}^n ; il est noté $\mathcal{SO}(n)$

Rappel : Soit $\mathcal{G} = (G, \star, ()^{-1}, I)$ où \circ , est une opération binaire interne sur l'ensemble G , $(A)^{-1}$ dénote l'inverse d'un élément A , et I est appelé élément neutre de l'opération. G est un groupe s'il vérifie les axiomes de groupe (à revoir).

Soit $H \subset G$; H est un sous groupe de G s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall A, B \in H \quad A \star B \in H$
2. $I \in H$
3. $\forall A \in H \quad A^{-1} \in H$

4.4 Endomorphisme symétrique

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Définition 4.30 : Soit E un espace vectoriel euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est dit symétrique (auto-adjoint) ssi $\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$

Proposition 4.31 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est symétrique (auto-adjoint) $\iff u^* = u$

Proposition 4.32 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E et $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice représentative de u dans \mathcal{B} .

u est symétrique ssi $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Proposition 4.33 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique de E .

1. Des vecteurs propres de u relatifs à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
2. Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
3. Tout sous-espace de E stable par u a son orthogonal stable par u .

Théorème 4.34 : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , et soit u un endomorphisme symétrique de E .

1. Le polynôme caractéristique a n racines réelles (non nécessairement distinctes).
2. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres (i.e. u est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres).

Théorème 4.35 (Résultat fondamental) :

Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.

Chapitre 5

Espaces Hermitiens

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{C} -espace vectoriel.

5.1 Produit scalaire hermitien, norme

5.1.1 Premières définitions

Définitions 5.1 .

1. Une application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *antilinéaire* si

$$\forall x, y \in E \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi(\lambda x) = \bar{\lambda} \cdot \varphi(x).$$

2. $E^{\bar{\cdot}} = \{ \varphi : E \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ antilinéaire} \}$

3. Une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée *forme sesquilinéaire* si elle est *linéaire par rapport à la deuxième variable et antilinéaire par rapport à la première* .

$$\text{On a donc : } h\left(\sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu}_j h(x_i, y_j).$$

4. Notons $\mathcal{L}'_2(E)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des formes sesquilinéaires sur E .

5. Une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée *forme hermitienne* si elle est *linéaire par rapport à la première variable et vérifie $h(y, x) = \overline{h(x, y)}$* .

6. Une matrice carrée H à coefficients dans \mathbb{C} est dite *hermitienne* si ${}^t H = \bar{H}$.

Exemples : (Cf Cours)

Conséquences 5.2 .

- Une forme hermitienne est une forme sesquilinéaire.
- Si h est hermitienne alors pour tout $x \in E$, $h(x, x)$ est réel.
- $E^{\bar{\cdot}}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de même dimension que E .
- L'ensemble des formes hermitiennes sur E est un \mathbb{R} -espace vectoriel mais pas un \mathbb{C} -espace vectoriel.
- Les propriétés des formes hermitiennes sont analogues à celles des formes bilinéaires symétriques et se démontrent en général de la même façon.
- Si H est à coefficients réels, H hermitienne équivaut à H symétrique.

Définitions 5.3 Soit h une forme hermitienne sur E .

1. x et y sont *orthogonaux* (par rapport à h) si $h(x, y) = 0$.

2. Si X est une partie de E , $X^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in X \quad h(x, y) = 0\}$ est un sous-espace de E , appelé *orthogonal de X* .
3. h est *définie positive* si $\forall x \neq 0 \in E \quad h(x, x) > 0$. Ce qui signifie :
 $\forall x \in E \quad h(x, x) = 0 \iff x = 0$
4. Un *produit scalaire hermitien* est une forme hermitienne définie positive.
5. Un *espace hermitien* est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien.
 On dit aussi "*préhilbertien complexe*".

Exemples :

- Le produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^n défini par : $\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$
- Voir exercices

5.1.2 Représentation matricielle

Définition 5.4 . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Appelons H la matrice $(h(e_i, e_j))_{i,j}$. On dira que H est la *représentation matricielle de h dans la base \mathcal{B}* .

Proposition 5.5 . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $h \in \mathcal{L}'_2(E)$ (une forme sesquilinéaire de E).

$$\begin{aligned} \text{Soit } \Phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}'_2(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ h &\longmapsto H = (h(e_i, e_j))_{i,j} \end{aligned}$$

1. $\Phi_{\mathcal{B}}$ est une bijection entre $\mathcal{L}'_2(E)$ et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$
2. Si $x, y \in E$, et $h \in \mathcal{L}'_2(E)$ ont comme représentations matricielles respectives X, Y , et H alors $h(x, y) = {}^t X \cdot H \cdot \bar{Y}$
3. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Soient H et H' les matrices représentatives de h dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' alors $H' = {}^t P \cdot H \cdot \bar{P}$.
4. La matrice représentative d'une forme hermitienne est une matrice hermitienne.

Notation : Lorsque h est un produit scalaire, on adoptera la même notation que dans les espaces euclidiens i.e. $h(x, y)$ sera noté $\langle x \mid y \rangle$ et $\|x\|$ désignera $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Proposition 5.6 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace hermitien E ; soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ et soient X, Y les colonnes représentatives respectives de x, y dans la base \mathcal{B}

1. $\langle x \mid y \rangle = {}^t X \cdot \bar{Y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
2. $\forall i \in \{1 \dots n\} \quad x_i = \langle x \mid e_i \rangle$.

5.1.3 Norme Hermitienne

Définition 5.7 Une application N de E dans \mathbb{R}^+ est appelée *norme sur E* si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

1. $N(x) = 0 \implies x = 0$
2. $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
3. $\forall x, y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Remarque : 2. implique $N(0) = 0$.

Proposition-Définition 5.8 . Soit $E, \langle - | - \rangle$ un espace hermitien.

L'application $\|-\| : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$
 $x \longmapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur E .

On l'appelle *norme hermitienne de l'espace E* , (dérivée du produit scalaire).

Définitions 5.9 .

1. Un vecteur est dit *unitaire* si sa norme vaut 1.
2. Une base est dite *orthogonale* si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
3. Une base est dite *orthonormée* si elle est orthogonale et si ses vecteurs sont unitaires

Proposition 5.10 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt) Soit (e'_1, \dots, e'_n) une base quel-

conque de l'espace hermitien E . Posons $e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|}$

puis successivement pour $i \in \{2 \dots n\}$ $e''_i = e'_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e'_i | e_k \rangle e_k$ et $e_i = \frac{e''_i}{\|e''_i\|}$

On obtient ainsi une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) .

Corollaire 5.11

Tout espace vectoriel hermitien possède une base orthonormée.

5.2 Endomorphisme adjoint

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel hermitien dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Proposition 5.12 (Isomorphisme canonique entre E et $E^{\bar{\cdot}}$) .

Soit $\Phi : E \longrightarrow E^{\bar{\cdot}}$ où $\langle - | y \rangle : E \longrightarrow \mathbf{C}$
 $y \longmapsto \langle - | y \rangle$ $x \longmapsto \langle x | y \rangle$

Φ est un isomorphisme.

Proposition-Définition 5.13 Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un et un seul endomorphisme (noté u^*) appelé l'adjoint de u tel que :

$$\forall x \forall y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$$

Proposition 5.14 Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$; et soit A et A^* les matrices représentatives respectives de u et u^* .

$$A^* = {}^t \bar{A}$$

Proposition 5.15 Soient u, v des endomorphismes de E et soit λ un scalaire de \mathbf{C} .

1. $u^{**} = u$ $(Id)^* = Id$
2. $(u + v)^* = u^* + v^*$ $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
3. $(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$
4. $rang(u^*) = rang(u)$, $\det(u^*) = \overline{\det(u)}$

5.3 Groupe unitaire

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel hermitien dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Proposition 5.16 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ "u conserve le produit scalaire".
2. $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$ u conserve la norme"
3. $u^* \circ u = Id \quad (u \circ u^* = Id)$.
4. u est bijective et $u^{-1} = u^*$

Définition 5.17 (endomorphisme unitaire) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; Si u vérifie l'une de ces propriétés alors u est appelé un *endomorphisme unitaire* ou *isométrie (linéaire)*.

Proposition 5.18 Le déterminant et les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire sont de module 1.

Propositions-Définitions 5.19 .

1. L'ensemble des endomorphismes unitaires de E est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E, appelé le groupe unitaire de E ; il est noté $\underline{U}(E)$.
2. L'ensemble des endomorphismes de $\underline{U}(E)$ dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\underline{U}(E)$ appelé groupe spécial unitaire ; il est noté $\underline{SU}(E)$

Définition 5.20 (matrice unitaire) .

Une matrice carrée complexe est dite *unitaire* si $A \cdot {}^t \bar{A} = I_n$.

Propositions-Définitions 5.21 .

1. L'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, appelé le groupe unitaire de \mathbb{C}^n ; il est noté $\underline{U}(n)$.
2. L'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le déterminant est égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appelé groupe spécial unitaire de \mathbb{C}^n ; il est noté $\underline{SU}(n)$

Remarque : $\mathcal{O}(n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap \underline{U}(n)$ puisque si A est réelle et orthogonale alors A est unitaire.

Proposition 5.22 .Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E ; soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u est unitaire.
2. L'image de \mathcal{B} par u est une base orthonormée de E.
3. u est inversible et $u^{-1} = u^*$
4. Les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien canonique de \mathbb{C}^n .
5. A est unitaire.
6. \bar{A} est unitaire.
7. A est inversible et $A^{-1} = {}^t \bar{A}$
8. ${}^t A$ est unitaire.
9. ${}^t \bar{A}$ est unitaire.
10. Les vecteurs lignes de A constituent une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien canonique de \mathbb{C}^n .

Corollaire 5.23 Dans un espace hermitien E , la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice unitaire.

Proposition 5.24 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Si tout sous-espace stable par u a son orthogonal stable par u alors, u est diagonalisable dans une base orthonormée. C'est à dire qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres pour u .

Proposition 5.25 Soit $u \in \mathcal{U}(E)$ endomorphisme unitaire.

Alors, tout sous-espace de E stable par u a son orthogonal stable par u .

Théorème 5.26 .

Un endomorphisme unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée.

5.4 Endomorphisme hermitien, Matrice hermitienne

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel hermitien dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Définition 5.27 Un endomorphisme u de E est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$$

Proposition 5.28 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$;

$$u \text{ est hermitien ssi } u = u^*$$

Proposition 5.29 Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E . Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} .

$$u \text{ est hermitien ssi } A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ est hermitienne.}$$

Proposition 5.30 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, endomorphisme hermitien

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
2. Tout sous-espace de E stable par u a son orthogonal stable par u .
3. Les valeurs propres de u sont des nombres réels.

Théorème 5.31 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, endomorphisme hermitien

$$u \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée.}$$

Corollaire 5.32 .

Si A est une matrice hermitienne, alors il existe une matrice unitaire P (i.e. $P^{-1} = {}^t\bar{P}$) telle que ${}^t\bar{P}.A.P$ soit diagonale réelle.

Corollaire 5.33 .

Si A est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice orthogonale P réelle (i.e. $P^{-1} = {}^tP$) telle que ${}^tP.A.P$ soit diagonale.

5.5 Endomorphisme normal, Matrice normale

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel hermitien dont le produit scalaire est noté $\langle - | - \rangle$

Définitions 5.34 .

1. Un endomorphisme u de E est dit *normal* si $u^* \circ u = u \circ u^*$.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(E)$ est dite *normale* si ${}^t\bar{A} \circ A = A \circ {}^t\bar{A}$

Proposition 5.35 . Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative.

$$u \text{ est normal} \iff A = M_{\mathcal{B}}(u) \text{ est normale}$$

Exemples de matrices normales :

1. les matrices symétriques réelles
2. les matrices antisymétriques réelles
3. les matrices orthogonales réelles
4. les matrices hermitiennes
5. les matrices unitaires

Mais il y en a d'autres. Exemples : $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

Théorème 5.36 . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(E)$

1. Si u est un endomorphisme normal alors u est diagonalisable dans \mathbb{C} dans une base orthonormée (les sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux)
2. Si A est une matrice normale alors A est diagonalisable dans \mathbb{C} dans une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien canonique de \mathbb{C}^n .

Lemme 5.37 . Soit u un endomorphisme normal de E et E_{λ}^{\perp} l'orthogonal du sous-espace propre relatif à la valeur propre λ de u .

1. E_{λ}^{\perp} est stable par u .
2. La restriction de u à E_{λ}^{\perp} est un endomorphisme normal.

Chapitre 6

Exercices

6.1 Réduction de matrices

1. Soit f un endomorphisme de E K -espace vectoriel
 - (a) Etude des valeurs propres de f^k connaissant celles de f .
 - (b) Quelles sont les valeurs propres possibles de f si $f \circ f = f$
 - (c) Donner la forme des matrices diagonales vérifiant $A^2 = A$.
 - (d) Quelles sont les valeurs propres possibles de f si $f^2 = I$
 - (e) Donner la forme des matrices diagonales vérifiant $A^2 = I$.
 - (f) Quelles sont les valeurs propres possibles de f si f est nilpotent (i.e. tel que $\exists k / f^k = 0$)
 - (g) f nilpotent est-il diagonalisable? Quelle est la forme des matrices diagonales nilpotentes?
2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E .
 - (a) Montrer que u injectif $\iff 0$ n'est pas valeur propre de u .
 - (b) Montrer que si u est bijectif, λ valeur propre de $u \iff 1/\lambda$ valeur propre de u^{-1} .
3. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n , où A est inversible. Montrer que $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
4. Soit $E = \{ f_{(\alpha,\beta)} \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) / (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \text{ où pour tous nombres réels } (\alpha, \beta) : \}$
$$f_{(\alpha,\beta)} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto f_{(\alpha,\beta)}(x) = e^{-x}(\alpha \operatorname{ch}(x) + \beta \operatorname{sh}(x)) \}$$
 - (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. En donner une base.
 - (b) Vérifier que l'opérateur de dérivation est un endomorphisme ∂ de E .
 - (c) Donner la matrice de ∂ dans la base précédemment choisie.
 - (d) Si ∂ est diagonalisable, donner une base dans laquelle la matrice de ∂ est diagonale.
5. Soit a un réel positif. On note \mathcal{D} l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $] -a, a[$ dans \mathbf{C} . Soit $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{D} \quad \forall x \in] -a, a[\quad u(f)(x) = \int_0^x f(t)$$

- (a) Montrer que u est un endomorphisme de \mathcal{D} .
 - (b) Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
 - (c) Déterminer les valeurs propres de u .
6. On note $\ell^2 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} / \forall n \ x_n \in \mathbf{C} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$.

- (a) Montrer que ℓ^2 est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension infinie.
- (b) Montrer que $u : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ défini par $\begin{cases} u(x)_0 = 0 \\ \forall n \leq 1 & u(x)_n = x_{n-1} \end{cases}$ est linéaire.
- (c) Montrer que u n'a pas de valeur propre.

7. Soient

- E l'espace des polynômes de degré $\leq 2n$ sur \mathbb{C}
- $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{c}{a-b} \notin \mathbb{Z}$
- $u : E \longrightarrow E$
 $P \longmapsto u(P) \quad \text{tq } u(P) = (X-a)(X-b)P' - (2nX - n(a+b) + c)P$
 où P' désigne le polynôme dérivée de P .

- (a) Montrer que u est bien définie et que c'est un endomorphisme de E .
- (b) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de u .
- (c) Montrer que u est bijective.
- (d) Résoudre $u(P) = 1$.

8. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ? Si oui les diagonaliser i.e. pour chaque matrice diagonalisable donner une matrice diagonale semblable et la matrice de passage associée.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

9. Pour la matrice A_2 déduire de la diagonalisation que :

- a) $A_2^{2n} = I$ et $A_2^{2n+1} = A_2$
- b) A_2 est inversible; donner son inverse.

10. Soient les matrices suivantes :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. Application $n = 1994$
- (b) Utiliser $P_B(\lambda)$ pour donner une expression de B^{-1} en fonction de B lorsque B est inversible

11. Soient les matrices réelles suivantes :

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -5 & -9 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C_6 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 6 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad C_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Diagonaliser ou trigonaliser (triangler) dans \mathbf{R} :

(b) Exprimer C_i^{-1} en fonction de C_i à l'aide de $P_{C_i}(\lambda)$.

12. Résoudre les systèmes différentiels :

$$(a) \begin{cases} x'_1 = ix_1 & + e^{2it} \\ x'_2 = (1+i)x_1 + 2ix_2 \\ x'_3 = 2x_1 + (3+i)x_2 + 3ix_3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 \\ x'_2 = x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ x'_3 = -4x_1 + 5x_3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = 8x + 16y + e^t \\ y' = -9x - 16y + e^{2t} \end{cases}$$

13. Résoudre les équations différentielles :

$$(a) x^{(3)} - 3x'' + 9x' + 13x = e^{it}$$

$$(b) x^{(5)} + 3x^{(4)} + 3x^{(3)} + x^{(2)} = 0$$

$$(c) x^{(4)} + 3x^{(3)} + 2x^{(2)} - x' = \sin(t)$$

14. Soit u un endomorphisme de E , espace vectoriel sur \mathbf{R} , de dimension 2, qui admet 1 et -1 comme valeurs propres.

Etudier la suite $((ku)^n(x_0))_n$ où $x_0 \in E$ et $k \in \mathbf{R}$

15. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et u un automorphisme de E . On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\{x, u(x), u^2(x)\}$ soit libre.

(a) Montrer qu'il existe $a, b, c \in K$ tels que $u^3(x) = ax + bu(x) + cu^2(x)$.

Ecrire la matrice de u dans la base $\{x, u(x), u^2(x)\}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de u .

(b) Montrer que $u^3 = aI_E + bu + cu^2$.

(c) Montrer que les espaces propres de u sont de dimension 1.

16. Soit u un endomorphisme d'un K -espace vectoriel de dimension n et x_0 un vecteur tel que $\mathcal{B} = \{x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\}$ soit une base de E .

(a) Montrer que le seul sous-espace vectoriel de E stable par u , qui contienne x_0 est E

(b) Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ les coordonnées de $u(x_0)$ dans la base \mathcal{B}

(c) Montrer que $u^n = \alpha_0 I + \alpha_1 u + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$

17. Sur $K = \mathbb{C}$, on considère

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = (p_{k,l})_{0 \leq k, l \leq n-1} \quad \text{où} \quad p_{k,l} = e^{\frac{2i\pi kl}{n}}$$

(a) Calculer $P \cdot \bar{P}$. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1} .

- (b) Montrer que pour toute racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ω , $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

Quelle est la valeur propre correspondante ?

- (c) Calculer $P^{-1}.A.P$.

18. On considère l'endomorphisme u de \mathbf{R}^2 représenté dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

- (a) u est-il diagonalisable ?
 (b) Interpréter le problème géométriquement.

19. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{C} , $u, v \in \mathcal{L}(E) - \{0\}$.

- (a) Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, tout sous-espace propre de u est stable par v .
 (b) Montrer que si u et v ont chacun n valeurs propres distinctes,
 $u \circ v = v \circ u \iff u$ et v ont les mêmes vecteurs propres.
 (c) Montrer (par récurrence sur n) que $u \circ v = v \circ u \implies u$ et v ont un vecteur propre commun.

20. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, E' un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$, u un endomorphisme de E laissant stable E' . On note v la restriction de u à E' . Montrer que

- (a) λ valeur propre de $v \iff \lambda$ valeur propre de u et $E_\lambda \cap E' \neq \{0\}$.
 (b) Si le polynôme caractéristique de u se décompose complètement dans K , alors il en est de même pour v .
 (c) Si u est diagonalisable, alors v l'est aussi (penser aux supplémentaires stables).

21. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. On rappelle que tout sous-espace propre E de u_λ est stable par v .

- (a) Montrer que pour toute valeur propre λ de u , la restriction de v à E_λ est diagonalisable.
 (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

22. Démontrer le théorème suivant : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u est diagonalisable ssi $P_u(t)$ est scindable et si tout sous-espace E' de E stable par u , admet un sous-espace supplémentaire E'' stable par u .

6.2 Dualité

1. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 4 et \mathcal{B} une base de E .

Soit \mathcal{B}' l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont $(2, 1, 0, 4), (1, 0, 3, 2), (0, 1, -3, 2), (1, 1, 2, 2)$. (On vérifiera que \mathcal{B}' est une base de E).

Soit $\varphi \in E^*$ la forme linéaire définie par :

$$\varphi(v) = 3x + 5y - z - 2t \text{ si } v \text{ a pour coordonnées } (x, y, z, t) \text{ dans } \mathcal{B}$$

- (a) Donner les composantes de φ dans \mathcal{B}^* et \mathcal{B}'^* les bases duales de \mathcal{B} et \mathcal{B}'
 (b) Exprimer $\varphi(v)$ en fonction de x', y', z', t' si v a pour coordonnées (x', y', z', t') dans \mathcal{B}' .
2. Sur \mathbf{R}^2 , on définit une forme bilinéaire b , dépendant du paramètre réel t par $b(v, w) = tx_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + tx_2y_2$ où $v = (x_1, x_2)$ et $w = (y_1, y_2)$.
- (a) Etudier, selon les valeurs de t , si b est non dégénérée.
 (b) Quel est l'orthogonal du vecteur $v = (1, 1)$ lorsque b est non dégénérée ?
3. Notons $\text{Tr}(A)$ la trace d'une matrice de $E = \mathcal{M}_n(K)$.
- (a) Montrer que $\text{Tr} \in E^*$.
 (b) Donner la décomposition de Tr sur la base duale de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$

4. Soit $E = \mathbf{R}^3$ et E^* son dual. Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ sa base duale. Soit $V = (1, 1, 1)$

Donner une base de $\{V\}^\perp$ relativement à la forme bilinéaire non dégénérée $b : E^* \times E \longrightarrow K$
 $\varphi, v \longmapsto \varphi(v)$

5. Soit $E = \mathbf{R}^4$. On considère le sous-espace vectoriel F engendré par :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Quelle est la dimension de F ? de F^\perp ?
 (b) Donner une base de F^\perp

6. Soit dans $E = \mathbf{R}^4$ le sous-espace F engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

- (a) Quelle est la dimension de F ? Quelle est la dimension de F^\perp ?
 (b) Montrer que

$$\forall \varphi \in F^\perp \exists a, b \in \mathbf{R} \quad \forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E \quad [\varphi(v) = 4ax + 4by - (3a + b)z - (3b + a)t]$$

En déduire deux formes φ_1 et φ_2 constituant une base de F^\perp .

Donner les composantes de φ_1 et φ_2 dans la base duale de la base canonique.

7. Soient $E = \mathbf{R}_5[X]$, et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ sa base canonique.

Pour $P \in E$, $i \in \mathbf{N}$ on note $P^{(i)}$ la dérivée $i^{\text{ème}}$ de P et on pose $\varphi_i(P) = P^{(i)}(0)$.

- (a) Montrer que $\{\varphi_0, \dots, \varphi_5\}$ est une base de E^* .
 (b) Trouver les coordonnées dans cette base de la forme ψ définie par

$$\psi(P) = \int_0^1 P(t) dt$$

- (c) Exprimer dans \mathcal{B}^* une base de $(\text{Ker } \psi)^\perp$.

8. Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , K -espace vectoriel. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Démontrer que

- (a) $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$
 (b) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
 (c) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

9. Soit E un K -espace vectoriel, $A \subset E$ et $B \subset E$, et E^* le dual de E .

- (a) Montrer que $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
 (b) Soit e un élément de E . Notons $\text{Vect}[e]$ le sous-espace vectoriel engendré par e .
 Montrer que $\{e\}^\perp = \text{Vect}[e]^\perp$

6.3 Formes bilinéaires et Formes quadratiques

1. Soit $E = \mathbf{R}^2$, soit $b : E \times E \longrightarrow K$, la forme bilinéaire sur E , définie par : $b(v, w) = x_1y_1 - x_2y_2$

- (a) Montrer que b est une forme bilinéaire non dégénérée
 (b) soit $H = \{v \in E / x_1 = x_2\}$
 i) Déterminer H^\perp
 ii) Que pouvez-vous dire de $H + H^\perp$

2. Soit b une forme bilinéaire symétrique définie (i.e. telle que $[b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0]$)
 Soit une fonction $u : E \rightarrow E$ vérifiant : $\forall x, y \in E \quad b(u(x), u(y)) = b(x, y)$
 Montrer que u est linéaire et injective
3. Soit $u \in E^*$ et
$$b : E \times E \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto u(x).u(y)$$
- (a) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique
 (b) Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .
 Ecrire la matrice de b dans \mathcal{B} . (On posera $u(e_i) = \alpha_i$).
 (c) Déterminer $\text{rg}(b)$
 (d) b est-elle une forme bilinéaire non dégénérée ?
4. Donner un exemple d'une forme quadratique non dégénérée et non définie.
5. Soit f la forme bilinéaire sur \mathbf{R}^2 définie par :

$$f(v, w) = 33x_1y_1 - 14(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_2$$

- Si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont les coordonnées respectives de v et w dans la base canonique $\mathcal{B} = [e_1, e_2]$.
- (a) Ecrire la matrice de f relativement à \mathcal{B} la base canonique de \mathbf{R}^2 .
 (b) Soit $e'_1 = e_1 + 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + 5e_2$. Montrer que $[e'_1, e'_2]$ est une base de E .
 (c) Vérifier que e'_1 et e'_2 sont orthogonaux
 (d) Ecrire la matrice de f par rapport à $\{e'_1, e'_2\}$
 (e) Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f par rapport à chacune des bases $[e_1, e_2]$ et $[e'_1, e'_2]$
 (f) q est-elle définie?, si oui est-elle définie positive?
6. Considérons les applications de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} suivantes (où $X = (x, y, z)$) :

$$\begin{cases} q_1(X) = x^2 + 3y^2 + 2xyz \\ q_2(X) = x^2 - y^2 + 2yz - 3xz + 1 \\ q_3(X) = xy + yz + 2x \\ q_4(X) = x^3 - 2xy + 2xz \end{cases}$$

Sont-elles des formes quadratiques ?

7. Soient les formes quadratiques sur \mathbf{R}^3 ou \mathbf{R}^4 suivantes (où v désigne respectivement (x, y, z) dans \mathbf{R}^3 et (x, y, z, t) dans \mathbf{R}^4) :
- $q_1(v) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 7yz - 4zx + 3xy$
 $q_2(v) = (x + 2y + z)^2 + (x + 2y - 2z + t)(2x + 4y - z)$
 $q_3(v) = yz + zx + xy + \lambda(x + y + z)t + \mu t^2$
 $q_4(v) = (y - x)^2 + (z - y)^2 + (x - z)^2$
 $q_5(v) = xy + yz + 2xz + 2y^2 + 2z^2 + x^2$
 $q_6(v) = x^2 - 2xy + 2xz$
 $q_7(v) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 8zx$
- Pour chaque forme quadratique
- (a) La décomposer en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes
 (b) Donner son rang, sa signature, et préciser si elle est définie positive ou négative
 (c) Donner une base de l'espace orthogonale pour q_i , (orthonormée pour q_i lorsque c'est possible).
8. Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel, q une application de E dans \mathbf{R} .
 Démontrer que q est une forme quadratique ssi :
- (a) $\forall x, y \in E \quad q(x + y) + q(x - y) = 2.(q(x) + q(y))$
 (b) $\forall x, y \in E$ l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & q(x+ty) \end{matrix}$ est continue.
9. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, et $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ sa base canonique.
 Soit $b : E \times E \rightarrow K$ telle que $b(A, B) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(A).\text{Tr}(B) - \text{Tr}(A.B))$

- (a) i) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique
 ii) Ecrire la matrice de b dans \mathcal{B}
 iii) Montrer que b est une forme bilinéaire non dégénérée
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$
 i. Rappeler pourquoi $A^2 - (Tr(A))A + (det(A))I_2 = 0$
 ii. Soit q la forme quadratique associée à b .
 a) Montrer que : $q(A) = det(A)$.
 b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes pour q .
 iii. Montrer que : $Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(A \cdot B) = det(A+B) - det(A) - det(B)$
10. Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques définies positives sur \mathbf{R}^n .
 Démontrer qu'il existe deux réels positifs a et b tels que $aq_1 \leq q_2 \leq bq_1$.

6.4 Espaces euclidiens

1. Caractérisations des espaces euclidiens

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère les assertions suivantes. Montrer que 1, 2, 3, et 5 sont équivalentes et que 1 implique 4.

(a) $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur E par $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

(b) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(c) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \phi_{x,y} : t \mapsto \|x + ty\|$ est une fonction continue en t .

(d) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad F : x \mapsto \sum_{i=1}^n \|x - x_i\|^2$ atteint son maximum en $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

(e) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \sum_{i=1}^n \|x - x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 - n\|X\|^2$

2. Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Dans l'espace euclidien \mathbf{R}^4 , on considère les vecteurs :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, -1, -2) & ; & & v_2 &= (2, 3, 0, -1) \\ v_3 &= (5, -2, -5, -2) & ; & & v_4 &= (8, 10, -10, 4) \end{aligned}$$

Montrer que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de \mathbf{R}^4 et lui appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée.

3. Polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$. On définit sur $E \times E$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par :

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

(a) Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire et qu'il munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien

(b) i. Ecrire $\langle P | Q \rangle$ en opérant le changement de variables $t = \cos(\theta)$

ii. Ecrire les polynômes $T_k(t)$, tels que $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$

iii. Ecrire T_2, T_3

iv. Calculer $\langle T_k | T_l \rangle$

(c) En déduire une base orthonormée de E . Application à $n=3$

4. Polynômes de Laguerre

Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$. On définit sur $E \times E$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par :

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$$

- (a) Montrer que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire et qu'il munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien
- (b) Soit $\mathcal{B} = [P_0, \dots, P_n]$ la base canonique de E . (i.e. $P_i(X) = X^i$)
- Calculer $\langle P_i | P_j \rangle$
 - Calculer une base orthonormale de \mathbf{R}^2 à partir de P_0, P_1, P_3 par la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
5. **Polynômes de Legendre** Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ l'espace des fonctions continues sur \mathbf{R} . On définit sur $E \times E$, $\langle | \rangle$ par :

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$$

$\mathcal{B} = \{P_0, \dots, P_n, \dots\}$ la famille de polynômes o, : $P_i(X) = X^i$)

- (a) Montrer que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire et qu'il munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien
- (b) Montrer que $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre mais non orthogonale de E .
- (c) Soit F le sous-espace de E engendré par $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$
- Déterminer par le procédé de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ de F .
 - Soit Π_3 la projection orthogonale de P_3 sur F . Déterminer Π_3 dans la base $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ de F et calculer la distance de P_3 à F .
6. **Adjoint.** Soit $(E, \langle - | - \rangle)$ un espace euclidien et soit $\|-\|$ la norme euclidienne associée.

- (a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :
- $$\text{Ker}(u) = (\text{Im}(u^*))^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u)^* = (\text{Im}(u))^\perp$$
- (b) On suppose que $u = u^*$ et $\forall x \in E \quad \langle x | u(x) \rangle = 0$.
Montrer que : $u = 0$.
- (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel $M \subset E$ tel que :
- $$\forall x \in M \quad \|v(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \forall x \in M^\perp \quad v(x) = 0.$$
- Démontrer que : $\text{Ker}(v) = M^\perp$.

7. Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle - | - \rangle$.
Soit $F : (x, y) \mapsto {}^t X \cdot Y$ (où X, Y sont les matrices colonnes représentatives de x, y dans la base canonique de \mathbf{R}^n). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible (A est la matrice représentative d'un endomorphisme dans la base canonique appelé aussi, par abus de notation, A).
- (a) Montrer que les valeurs propres de $B = {}^t A \cdot A$ sont strictement positives.
- (b) Montrer que si la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathbf{R}^n est orthonormale et si la famille $\{Ax_1, \dots, Ax_n\}$ est orthogonale alors les x_i $i = 1, \dots, n$ sont des vecteurs propres de B .

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $n > 1$ définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{1.2}} & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -2 & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2.3}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

Vérifier que A est orthogonale

9. **Valeurs propres d'un automorphisme orthogonal**

Soit $(E, \langle - | - \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E .

- (a) Vérifier directement que les seules valeurs propres possibles de u sont 1 et -1.
- (b) On suppose que E est de dimension impaire
 - i. Montrer que si $\det(u) = 1$, alors u admet la valeur propre +1 avec un ordre de multiplicité impair (donc au moins une fois).
 - ii. Montrer que si $\det(u) = -1$, alors u admet la valeur propre -1 avec un ordre de multiplicité impair.
- (c) On suppose que E est de dimension paire
 - i. Donner un exemple où $\det(u) = 1$ et où ni 1 ni -1 ne sont des valeurs propres de u .
 - ii. Montrer que si $\det(u) = -1$, alors u admet les valeurs propres -1 et 1 avec des ordres de multiplicité impairs.

10. Soit $(E, \langle - | - \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et u un automorphisme orthogonal de E .
Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors il en est de même de F^\perp .

11. **Rotation dans \mathbf{R}^2**

Montrer que $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Montrer que toute matrice orthogonale d'ordre 2 sur \mathbf{R} est de l'une de ces deux formes.

12. **Matrices orthogonales de rotation dans \mathbf{R}^3**

Soit $E = \mathbf{R}^3$ espace vectoriel euclidien muni de son produit scalaire usuel.

On considère une *rotation* de \mathbf{R}^3 , c'est à dire un automorphisme orthogonal u de \mathbf{R}^3 de déterminant égal à 1. On suppose $u \neq id_{\mathbf{R}^3}$.

- (a) Montrer que l'ensemble \mathcal{D} des points invariants par u (i.e. l'espace propre E_1) est une droite vectorielle (\mathcal{D} dite axe de la rotation).
- (b) Soit \mathcal{P} le plan vectoriel orthogonal à \mathcal{D} . (Justifier que \mathcal{P} est un sous-espace de dimension 2)
Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont stables par u et que la restriction de u à \mathcal{P} est une rotation de \mathbf{R}^2 (\mathcal{P} est appelé le plan de rotation).
- (c) Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $\{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbf{R}^3 , telle que $v_1 \in \mathcal{P}$, $v_2 \in \mathcal{P}$, et $v_3 \in \mathcal{D}$.
- (d) Dédurre de ce qui précède que le cosinus de l'angle θ de la rotation induite sur \mathcal{P} par u vérifie l'équation : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(tr(u) - 1)$
et qu'il est donc indépendant de la base choisie.

13. **Détermination de l'angle d'une rotation de \mathbf{R}^3**

On considère une rotation u de l'espace euclidien orienté \mathbf{R}^3 , telle que $u \neq id_{\mathbf{R}^3}$. On oriente l'axe \mathcal{D} (de la rotation u) par le choix d'un vecteur unitaire $\nu \in \mathcal{D}$.

Montrer que le sinus de l'angle θ de la rotation u est déterminé par :

$$\sin \theta = \frac{1}{\|x\|^2} \det[x, u(x), \nu]$$

où x est un vecteur non nul du plan \mathcal{P} de rotation ($\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp$).

14. **Détermination simultanée de l'angle et de l'axe d'une rotation de \mathbf{R}^3**

Soit u une rotation de l'espace euclidien orienté \mathbf{R}^3 et U la matrice de u dans une base orthonormale directe.

- (a) Quelles sont les rotations pour lesquelles $U = {}^tU$?
- (b) On suppose $U \neq {}^tU$.

i. Montrer que $A = \frac{1}{2}[U - {}^tU]$ est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } (a, b, c) \text{ est un vecteur directeur de l'axe } \mathcal{D} \text{ de la rotation } u.$$

ii. Montrer que $A = \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$ où $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur unitaire orientant \mathcal{D} et θ est l'angle de la rotation u .

15. **Matrices de rotation (Exemples)** Montrer que chacune des matrices suivantes représente une rotation de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 , dont on déterminera l'axe et l'angle.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

16. **Matrices orthogonales de déterminant -1 dans \mathbf{R}^3**

Soit $E = \mathbf{R}^3$ espace vectoriel euclidien pour son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On considère un automorphisme orthogonal u de \mathbf{R}^3 de déterminant égal à -1. On suppose $u \neq -id_{\mathbf{R}^3}$.

- Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^3$ vérifiant $u(x) = -x$ est une droite vectorielle \mathcal{D} .
- Soit \mathcal{P} le plan orthogonal à \mathcal{D} . Montrer que \mathcal{P} est stable par u et que la restriction de u à \mathcal{P} est une rotation.
- Ecrire la matrice de u dans une base orthonormée $\{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbf{R}^3 , telle que $v_1 \in \mathcal{P}$, $v_2 \in \mathcal{P}$, et $v_3 \in \mathcal{D}$.
- En déduire que u est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation (de \mathbf{R}^3) dont le cosinus de l'angle θ est donné par : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(tr(u) + 1)$.

17. **Matrice orthogonales élémentaires de Householder**

Pour tout vecteur non nul $u = (u_1, \dots, u_n)$ de l'espace euclidien \mathbf{R}^n avec $n \geq 2$, on désigne par $H(u)$ la matrice (dite de Householder) définie par :

$$H(u) = I_n - 2 \frac{U^t U}{\|u\|^2} \quad \text{où } U = {}^t[u_1, \dots, u_n].$$

- Soit $O \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que si $v = Ou$ alors $H(v) = OH(u)O^{-1}$.
- Montrer que $H(u)$ est symétrique et orthogonale.
- On désigne par \mathcal{D} la droite \mathcal{D} la droite vectorielle de \mathbf{R}^n engendrée par u et par \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal de \mathcal{D} dans \mathbf{R}^n . Montrer que \mathcal{D} est stable par $H(u)$ et que $[H(u)]v = v$ pour tout $v \in \mathcal{V}$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $T : x \mapsto [H(u)]x$?

18. **Plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A** Montrer que la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à

$$\sup_{X \in \mathbf{R}^n} \frac{{}^t X \cdot A \cdot X}{{}^t X \cdot X}$$

6.5 Espaces hermitiens

1. Montrer que les applications suivantes sont antilinéaires :

- $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x_1, x_2, x_3 & \longmapsto & -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 5\bar{x}_3 \end{array}$
- $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & Tr(\bar{A}) \end{array}$

2. Soient les applications suivantes :

- $g_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$
 $X, Y \longmapsto -\overline{x_1}y_1 + 2i\overline{x_2}y_2 + (2i - 3)\overline{x_2}y_3 - 5\overline{x_3}y_2$
- $g_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(A, B) \longmapsto \text{Tr}({}^t\overline{AB})$

- (a) Montrer que les applications ci-dessus sont sesquilineaires, préciser si elles sont hermitiennes.
 (b) Ecrire dans les bases respectives de \mathbb{C}^3 et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices de ces formes sesquilineaires.

3. Base antiduale d'une base donnée.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et \mathcal{B} une base de E . Soient les applications antilinéaires $(\varphi_i)_i$ définies par : $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Montrer qu'elles constituent une base de E^* (appelée *base antiduale* de \mathcal{B})

Application : Déterminer la base antiduale de la base de \mathbb{C}^{3*} suivante :

$$e_1 = (i, -1, 2) ; e_2 = (0, 2, -1 + i) ; e_3 = (2i, 0, 0)$$

4. Montrer que $E^{\overline{*}\overline{*}}$ est isomorphe à E .

5. Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -i & -2i \\ i & 2 & 0 \\ 2i & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'elle est hermitienne et écrire la forme sesquilineaire hermitienne qu'elle représente.

6. Soit $E = \{ f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \}$; Montrer que la forme $\langle - | - \rangle$ suivante est une forme sesquilineaire hermitienne sur E .

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)$$

7. On considère la forme hermitienne ci-dessus restreinte aux polynômes de degré ≤ 2 . Montrer que c'est un produit scalaire, et qu'elle permet donc de munir E d'une structure d'espace hermitien. Déterminer une base orthonormale relative à ce produit scalaire

8. Montrer que la forme h , définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $h(A, B) = \text{Tr}({}^t\overline{AB})$ est un produit scalaire hermitien.

Exprimer la norme de la matrice A en fonction de ses coefficients.

9. Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$; soit λ une valeur propre de f . Montrer que :

- (a) Si $f^* = f^{-1}$ alors $|\lambda| = 1$
- (b) Si $f^* = f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$
- (c) Si $f^* = -f$ alors λ est imaginaire pur.
- (d) S'il existe un endomorphisme g de E tel que $f = g^* \circ g$ alors λ est un réel positif ou nul

10. (a) Soit $A \in \mathcal{SU}(2)$ et notons $A^* = {}^t\overline{A}$. Montrer que : $A^* = (\text{Tr}(A))I - A$

(b) Soit $\mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / M^* = -M \text{ et } \text{Tr}(M) = 0\}$ (ces matrices sont appelées anti-hermitiennes de trace nulle)

et soit $[I] \stackrel{\text{déf}}{=} \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M = kI \text{ avec } k \in \mathbb{R}\}$ (ces matrices sont appelées des homothéties réelles).

Montrer que : $\mathcal{SU}(2) = \mathcal{A} \oplus [I]$.

11. Soit E un espace hermitien, et soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme hermitien de E .

- (a) Montrer que $\forall x \in E \quad \langle f(x) | x \rangle$ est réel.
- (b) En déduire que $\forall x \in E \quad \|(f + iId_E)(x)\| = \|(f - iId_E)(x)\|$
- (c) Montrer que $f - iId_E$ est un automorphisme de E
 et que $g = (f + iId_E) \circ (f - iId_E)^{-1}$ est une transformation unitaire.
- (d) Montrer que $f - iId_E$ est inversible
 et que $f = i(g - iId_E)^{-1} \circ (g + iId_E)$