Probabilités & Statistiques L1: Exercices

December 23, 2007

Dénombrements

N1

Exercice 1 *Lancers*

1. On lance une pièce de monnaie 5 *fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE. Combien peut-on obtenir:*

(i) de suites distinctes *(ii) de suites commençant par PILE*

(iii) de suites comportant deux PILE exactement

2. On lance 2 *dés identiques à* 6 *faces, numérotées de* 1 *à* 6. *Combien peut-on obtenir de lancers distincts?*

Exercice 2 *Répartitions*

1. Une personne dispose de 20000 € *à investir sur* 4 *placements discernables. Donner le nombre de stratégies possibles dans les cas suivants:*

(i) elle peut ignorer certains placements *(ii) elle ne veut en négliger aucun*

2. 50 *étudiants discernables doivent être répartis en* 2 *groupes de TD discernables. Donner le nombre de répartitions en supposant qu'un groupe peut être vide.*

Exercice 3 *Tirages*

1. Une course comporte 16 *chevaux. Combien y a-t-il de tiercés possibles, dans l'ordre et dans le désordre?*

2. A partir d'un groupe de 5 *hommes et* 7 *femmes combien de comités peut -on créer qui comptent* 2 *hommes et* 3 *femmes.*

3. Un examen comporte 10 *questions et chaque étudiant doit répondre à* 7 *questions. Combien a-t-il:*

(i) de choix distincts *(ii) de choix comportant* 3 *questions parmi les* 5 *premières*

4. On tire avec remise 4 *lettres dans une urne contenant les lettres* a, b, c : *on note les lettres tirées sans tenir compte de l'ordre. Combien peut-on obtenir:*

(i) de tirages distincts *(ii) de tirages contenant au moins une fois la lettre a*

Exercice 4 *Permutations, Arrangements, Combinaisons*

1. Combien de mots distincts de 6 *lettres peut-on écrire avec les lettres du mot:*

(i) PINTES *(ii) ACACIA*

2. Combien peut-on écrire de suites croissantes de 3 *chiffres distincts pris parmi* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Exercice 5 *Répartitions sous contrainte*

1. Pour disputer un match de basket 10 *personnes se répartissent en deux équipes* A *et* B *de* 5 *membres chacune.*

(i) Donner le nombre de répartitions possibles.

(ii) Reprendre le calcul sachant qu'il y a dans le groupe deux personnes qui ne veulent pas jouer ensemble. Et si au contraire elles ne veulent pas être opposées?

2. Deux médecins doivent recevoir 10 *personnes: l'un peut en voir au plus* 6 *et l'autre au plus* 5*. Combien y a-t-il de répartitions possibles?*

3. L'équipe de police d'un village comporte 10 *personnes, qui doivent se répartir en* 5 *agents de patrouille,* 2 *agents de garde au comissariat et* 3 *agents de réserve. Donner le nombre de répartitions possibles.*

N2

Exercice 6 *Partition d'un entier, Coefficients multinomiaux*

1. Déterminer le nombre de suites $(n_1, ..., n_p)$ *d'entiers positifs ou nuls vérifiant* $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$*, où* n *est un entier positif.*

2. Soient n_1, n_2, n_3 *des entiers positifs ou nuls et* $n = n_1 + n_2 + n_3$: *montrer que* $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ *est le coefficient de* $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ *dans le développement de* $(x_1 + x_2 + x_3)^n$.

Espace probabilisé

N1

Exercice 7 *Equiprobabilité 1*

1. Dans un groupe de 10 *personnes il y a* 4 *hommes et* 6 *femmes. On choisit* 5 *personnes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir* 2 *hommes et* 3 *femmes.*

2. Dans une loterie on tire (sans remise) 8 *nombres parmi les nombres* $1, ..., 40$: *il n'y a qu'un tirage gagnant. Calculer la probabilité d'obtenir (dans le désordre):*

(i) 1 *bon numéro* *(ii) au moins* 2 *bons numéros*

3. On jette deux dés équiprobables à six faces. Calculer la probabilité que la somme des chiffres soit supérieure ou égale à 10.

Exercice 8 *Equiprobabilité 2*

1. On lance une pièce de monnaie équiprobable n *fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE. Quelle est la probabilité d'obtenir:*

(i) un seul PILE, au k-ème rang *(ii) un seul PILE*

2. On considère n *personnes possédant chacune un chapeau: les chapeaux sont rassemblés en un endroit et chaque personne en choisit un au hasard. On note* p_n *la probabilité qu'aucune personne n'ait tiré son propre chapeau: calculer* p_n *lorsque* $n = 2, 3$.

3. Une salle contient n personnes. Calculer la probabilité que deux personnes soient nées le même jour.

Exercice 9 *Espace probabilisé fini*

1. On considère deux évènements E_1, E_2 : *on connaît* $\mathrm{pr}(E_1) = 0.4$, $\mathrm{pr}(E_2) = 0.8$, $\mathrm{pr}(E_1 \cap E_2) = 0.3$. *Calculer la probabilité des évènements:*

(i) $E_1 \cup E_2$ *(ii)* $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ *(iii)* $E_1 \cap \overline{E_2}$ *(iv)* $\overline{E_1} \cap E_2$.

2. Dans un groupe 30% *des individus portent une bague et un collier,* 80% *portent une bague et* 40% *un collier. Quel est la probabilité qu'un individu ne porte ni bague ni collier.*

Exercice 10 Espace probabilisé infini

1. Trois personnes A, B, C lancent une pièce équiprobable à tour de rôle: la première qui obtient PILE a gagné. On suppose que A commence, suivi par B puis C. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience et calculer la probabilité de gagner pour chacun des joueurs.

2. On lance une pièce ronde de 2 cm de diamètre sur un échiquier à n^2 cases carrées de 4 cm de coté: on est sûr que la pièce tombe entièrement dans l'échiquier et on gagne si la pièce tombe entièrement dans un carré. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience et calculer la probabilité de gagner.

N2

Exercice 11 *Propriétés*

1. Montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{pr}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{pr}(A) + \operatorname{pr}(B) + \operatorname{pr}(C) \\ &\quad - \operatorname{pr}(A \cap B) - \operatorname{pr}(A \cap C) - \operatorname{pr}(B \cap C) + \operatorname{pr}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2. Donner une formule pour $\operatorname{pr}\left(\bigcup_{k=1}^{4} A_k\right)$.

Exercice 12 Permutations sans point fixe

Une permutation s sur E_n admet k comme point fixe si $s(k) = k$.

1. On tire une permutation s au hasard. Calculer la probabilité que les points $1, 2, ..., k$ soient fixes (et éventuellement d'autres).

2. On note p_n la probabilité que s n'ait pas de point fixe.

(i) Donner p_2.

(ii) On suppose que $n = 3$ et on note A_k l'évènement "le point k est fixe" pour $k = 1, 2, 3$. Calculer la probabilité qu'une permutation ait au moins un point fixe avec la formule de l'exercice précédent. En déduire p_3.

(iii) Idem pour $n = 4$.

Probabilité conditionnelle, Indépendance

N1

Exercice 13 *Arbre de choix*

1. Dans un groupe de 10 *personnes il y a* 4 *hommes et* 6 *femmes. On choisit deux personnes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient de même sexe?*

2. Dans une loterie on tire (sans remise) 8 *nombres parmi les nombres* $1, ..., 40$: *il n'y a que* 8 *numéros gagnants. Calculer la probabilité d'obtenir:*

(i) 8 *numéros gagnants* *(ii)* 5 *numéros gagnants*

Exercice 14 *Tableau d'intersection*

Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52*, et par ailleurs que* 2% *des filles et* 1% *des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.*

1. On note F l'évènement "naissance d'une fille" et L l'évènement "avoir une luxation de la hanche". Dresser le tableau des probabilités des intersections entre $F, \overline{F}$ et $L, \overline{L}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants?

2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 15 Formule de Bayes

Une firme a étudié un alcootest dans une population et a pour cela recruté 500 *personnes; elle a fait boire* 160 *d'entre elles et a obtenu les résultats suivants, où A désigne l'évènement "alcootest positif" et I l'évènement "individu ivre".*

	I	$\overline{I}$
A	150	18
$\overline{A}$	10	322

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\operatorname{pr}(A \mid I)$ *et* $\operatorname{pr}\left(\overline{A} \mid \overline{I}\right)$.

2. On suppose connue la probabilité p qu'un individu soit ivre dans la population. Calculer les probabilités conditionnelles $\operatorname{pr}(I \mid A)$ *et* $\operatorname{pr}\left(\overline{I} \mid \overline{A}\right)$ *et achever les calculs lorsque* $p = 0.01$.

Exercice 16 Indépendance

1. On lance une pièce de monnaie équiprobable 10 *fois de suite et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE. Quelle est la probabilité d'obtenir une suite comportant deux PILE exactement.*

2. Une salle contient n personnes. Calculer la probabilité qu'une personne (au moins) soit née le même jour que moi.

3. On jette un dé équiprobable à 6 *faces un nombre indéterminé de fois. Quelle est la probabilité qu'un* 5 *apparaisse avant un* 2 *?*

N2

Exercice 17 Evènements indépendants

On considère deux évènements A et B; on résume par le tableau ci-dessous les probabilités des intersections entre $A, \overline{A}$ et $B, \overline{B}$:

	B	$\overline{B}$
A	p	q .
$\overline{A}$	r	s

1. Montrer que A et B sont indépendants ssi $ps = qr$.

2. Montrer que si A et B sont indépendants alors il en va de même de $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 18 Systèmes série et parallèle

On dispose de deux types de composants électroniques E_1, E_2, au fonctionnement indépendant: on note p_1, p_2 leur taux de panne.

1. Calculer la probabilité de panne du système série formé de E_1, E_2.

2. On veut améliorer la fiabilité du système et on hésite entre deux stratégies: doubler le système ou doubler les composants, en parallèle. Déterminer la meilleure stratégie.

Exercice 19 Règle de multiplication, indépendance totale

1. Montrer que

$$\operatorname{pr}(A \cap B \cap C) = \operatorname{pr}(A)\operatorname{pr}(B \mid A)\operatorname{pr}(C \mid A \cap B).$$

2. Montrer que, si A, B, C sont en indépendance totale alors A est indépendant de $B \cap C$ et $B \cup C$.

Statistique descriptive

N1

Exercice 20 Série discrète

Une étude statistique sur la durée de vie des rats a donné le tableau suivant, où d est la durée de vie en mois et n est l'effectif correspondant:

d	10	15	20	25	28	30	32	34	36	38	40	42
n	1	3	9	12	13	20	23	26	22	11	3	1

1. (i) Tracer le diagramme des fréquences.

(ii) Tracer le diagramme et le polygône des FCC et FCD sur un même graphique.

2. Calculer la durée de vie moyenne μ ainsi que l'écart-type σ.

Exercice 21 Série continue

La capacité vitale c d'un individu est le volume d'air maximum qu'il peut mobiliser en une seule inspiration. Une étude statistique sur ce caractère a fourni le tableau de données suivantes, où c est en litres et f est la fréquence correspondante:

c	$[3.75, 4.25]$	$]4.25, 4.5]$	$]4.5, 4.75]$	$]4.75, 5]$	$]5, 5.25]$	$]5.25, 5.75]$
f	0.167	0.167	0.278	0.167	0.111	0.110

1. Convertir la série ci-dessus en une série dont toutes les classes ont même amplitude: on utilisera ces nouvelles données pour traiter la suite de l'exercice.

2. (i) Tracer le polygône des FCC et FCD sur un même graphique et estimer la médiane d'après ce graphique.

(ii) Utiliser la fonction de répartition pour calculer la fréquence de l'intervalle $[4.6, 5.5]$ *et la médiane.*

3. Calculer la moyenne μ en discrétisant la série.

Exercice 22 Courbe de Lorenz

Une étude INSEE a fourni les résultats ci-dessous sur les revenus 2004 (en €) des ménages en France: l'étude a porté sur 24837000 *ménages.*

% de la population	10%	20%	30%	40%	50%
Revenu <	11477	14408	17581	20942	24599

60%	70%	80%	90%	95%
28623	33171	39356	49554	62095

Par exemple 30% *des ménages ont gagné moins de* 17851 €*. Les données concernant les* 5% *les plus riches de la population ne sont pas fournies: on pourra convenir qu'ils gagnent moins de* 110000 €*.*

1. Calculer le revenu moyen et le revenu total des français.

2. Calculer pour $k = 1, ..., 10$ *la fraction du revenu total détenue par la* k*-ème fraction la plus pauvre de la population.*

3. Tracer la courbe de Lorenz à partir de ces données.

N2

Exercice 23 *Variance*

On considère une suite de réels $(x_1, ..., x_N)$ *et on pose*

$$d(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - t)^2 .$$

1.Ecrire $d(t)$ *sous la forme* $at^2 + bt + c$*.*

2. Montrer que le minimum de cette fonction est atteint pour $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$ *puis que*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k^2 - \overline{x}^2.$$

Variables aléatoires discrètes

N1

Exercice 24 *VA 1*

Une urne contient les mots LE, GRANDS, HANCHE, LA, FOU, ROSEAU et on tire au hasard un mot dans l'urne. On note X *la longueur du mot tiré,* Y *le nombre de voyelles,* $Z = X - Y$ *et* W *la variable indicatrice de l'évènement "le mot commence par la lettre* L*".*

1. Déterminer et représenter la loi de ces VA.

2. Calculer les probabilités $\mathrm{pr}(X \geq 3)$, $\mathrm{pr}(Y \leq 3)$, $\mathrm{pr}(X \geq 3, Y \leq 3)$, $\mathrm{pr}(Y > Z)$, $\mathrm{pr}(\max(Y, Z) = 2)$.

3. Calculer l'espérance et la variance de chaque VA.

Exercice 25 *VA 2*

Une urne contient chaque lettre de l'alphabet en un exemplaire. On tire 4 *lettres avec remise et on les range dans l'ordre du tirage.*

1. (i) On note X *le nombre des voyelles et* $F = \frac{1}{4}X$ *leur fréquence. Donner la loi de* X *et* F*.*

(ii) La VA Y_k *vaut* 1 *si la* k*-ème lettre est une consonne,* 0 *sinon: on pose* $Y = \sum_{k=1}^{4} Y_k$ *et* $G = \frac{1}{4}Y$*. Mêmes questions.*

(iii) On note S *et* T *la première apparition d'une voyelle et d'une consonne: on conviendra de donner la valeur* 5 *s'il n'y a pas d'apparition. Mêmes questions.*

2. Calculer les probabilités $\mathrm{pr}(X = 2, S = 1)$, $\mathrm{pr}(\max(X, S) \leq 2)$, $\mathrm{pr}(\min(Y, T) \leq 2)$, $\mathrm{pr}(X < Y)$.

Exercice 26 *VA indépendantes 1*

On tire sans remise 3 *boules dans une urne qui en contient* 2 *rouges et* 4 *noires: on les range dans l'ordre du tirage et on note* X *le nombre des boules rouges tirées et* Y *la première apparition d'une boule noire.*

1. Donner les lois de X *et* Y*.*

2. Calculer les probabilités $\operatorname{pr}(X = i, Y = j)$ *pour toutes les valeurs posssibles de* (i, j)*. Les variables* X *et* Y *sont elles indépendantes?*

Exercice 27 *VA indépendantes 2*

Un gène peut présenter deux caractères: dominant d *et* récessif r*. On considère deux gènes* X, Y *indépendants et on suppose que chacun présente le caractère* d *avec le même probabilité* p*. Calculer la probabilité qu'un individu possède au moins un gène* d*.*

Exercice 28 *Espérance 1*

Un joueur parie et mise sur un chiffre compris entre 1 *et* 6 *puis jette trois dés standards: il gagne* k *euros si le chiffre choisit apparaît* k *fois et perd* 1 *euro s'il n'apparaît pas. Calculer l'espérance de gain du joueur.*

Exercice 29 *Espérance 2*

Dans une population nombreuse une maladie affecte chaque individu avec la probabilité $1 - p$*. On veut détecter cette maladie à l'aide d'une analyse sanguine et on a le choix entre deux stratégies:*

- faire une analyse individuelle de chaque individu.

- regrouper les prélèvements sanguins de r *personnes et analyser cet échantillon; si le test est négatif cela signifie que les* r *individus sont sains sinon on refait une analyse individuelle pour détecter le ou les individus malades.*

1. On note $X_1(r)$ *et* $X_2(r)$ *le nombre d'analyses par individu lors des première et deuxième stratégies. Déterminer l'espérance de ces deux variables puis celle de* $G(r) = X_1(r) - X_2(r)$*.*

2. Donner une condition sur r *et* p *pour que cette espérance soit positive.*

N2

Exercice 30 *VA indépendantes 1*

On considère deux copies indépendantes X_1, X_2 *d'une VA* X *: on note* p *la loi de* X *et* F *sa fonction de répartition. On pourra ordonner les valeurs de* X *en* $x_1 < x_2 < ...$ *et noter* $p_k = p(x_k)$*.*

1. Calculer à l'aide des données les probabilités $\operatorname{pr}(X_1 = X_2)$, $\operatorname{pr}(X_1 > X_2)$ *et* $\operatorname{pr}(X_1 < X_2)$*.*

2. Déterminer la fonction de répartition et la loi de $\max(X_1, X_2)$ *et* $\min(X_1, X_2)$*.*

Exercice 31 *VA indépendantes 2*

On considère une suite $X_1, ..., X_n$ *de VA indépendantes de même espérance* μ *et écart-type* σ*. Donner l'espérance et l'écart-type des VA suivantes:*

(i) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *(ii)* $F_n = \frac{S_n}{n}$

Exercice 32 *Permutations sans point fixe*

On note p_n *la probabilité qu'une permutation de* E_n *n'ait pas de point fixe, et* S_n *la VA "nombre de points fixes d'une permutation de* E_n*": on admet que* $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$*.*

1. Donner la loi de S_n.

2. On note X_k la VA indicatrice de l'évènement "k est un point fixe" pour $k = 1, ..., n$.

(i) Calculer $E(X_k)$ puis $E(X_i X_j)$. Les VA X_i et X_j sont-elles indépendantes?

(ii) Exprimer S_n à l'aide des X_k. En déduire $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$.

Lois discrètes finies

N1

Exercice 33 *Loi binomiale 1*

1. Deux joueurs s'affrontent dans un sport: le joueur 1 est plus faible que le joueur 2, et n'a qu'une probabilité $p = 0.4$ de gagner. On suppose que les joueurs jouent 5 parties indépendantes: quelle est la probabilité que le joueur 1 en gagne plus de la moitié?

2. Un canal de transmission véhicule des 0 et des 1: à chaque seconde le chiffre transmis a une probabilité $p = 0.2$ d'être modifié en son contraire. Quelle est la probabilité qu'au bout de 10 secondes le chiffre reçu soit identique au chiffre émis?

Exercice 34 *Loi binomiale 2*

Dans un jury on suppose que chaque membre prend sa décision indépendamment des autres et qu'elle est correcte avec la probabilité $\theta = 0.7$: pour qu'un jugement soit exécutoire il faut qu'au moins 8 des 12 membres du jury prennent la même décision.

1. On note X le nombre de décisions correctes parmi les 12 membres du jury. Donner la loi de X.

2. Calculer la probabilité d'une sentence juste sachant que l'inculpé est coupable. Mêmes questions sachant que l'inculpé est innocent.

Exercice 35 *Loi hypergéométrique*

Un électricien achète des composants par paquets de 10 : dans chaque paquet il teste au hasard 3 composants et accepte le paquet si ces trois là sont sans défaut.

1. On note X le nombre de composants défectueux sur les 3 tirés parmi 10 du paquet, et p la proportion de composants défectueux dans ce paquet. Donner la loi de X.

2. On suppose que 30% des paquets contiennent 4 composants défectueux et que les 70% restant n'en contiennent qu'un: calculer la proportion des paquets qui seront rejetés.

Exercice 36 *Approximation binomiale d'une loi hypergéométrique*

Une société imprime N tickets, dont 1% sont gagnants: elle les vend par lots de 10.

1. On note X le nombre de tickets gagnants dans un lot.

(i) Donner la loi de X et calculer la proportion des lots qui contiennent au moins un ticket gagnant lorsque $N = 1000,\ N = 500,\ N = 100$.

(ii) Comparer avec le résultat fourni par l'approximation binomiale de la loi de X.

2. Chaque lot est vendu au prix de $1000/N$ € *et la société rembourse* $1000k/N$ € *si le lot contient* k *tickets gagnants. Un client achète un lot de tickets: calculer l'espérance de son gain.*

N2

Exercice 37 *Loi d'une fréquence*

Si $X_1, ..., X_n$ *sont* n *variables de Bernouilli indépendantes de même paramètre* p *alors la variable* $F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ *représente la fréquence de succès. Donner la loi de* F *et calculer son espérance et son écart-type.*

Exercice 38 *Loi binomiale*

On considère deux VA binomiales indépendantes X *et* Y*, de paramètres respectifs* (n, p) *et* (m, p) *. Montrer que* $X + Y$ *est une VA binomiale de paramètres* $(n + m, p)$ *.*

Lois discrètes dénombrables

N1

Exercice 39 *Loi géométrique 1*

1. On jette une pièce un nombre indéterminé de fois: la probabilité d'obtenir PILE vaut $1/3$ *et on note* X *le temps d'attente avant le premier PILE. Calculer les probabilités:*

(i) $\text{pr}(X \leq 4)$ *(ii)* $\text{pr}(X > 10)$

2. Dans un jeu de hasard la probabilité de gagner est $p = 10^{-8}$.

(i) Une personne joue tous les jours: on note T *le temps d'attente par an du premier gain. Déterminer la loi de* T *et le temps d'attente moyen.*

(ii) n *de personnes jouent tous les jours, indépendamment les unes des autres: on note* $T(n)$ *le temps d'attente (en jours) avant qu'au moins une personne gagne. Déterminer la loi de* $T(n)$ *et le temps d'attente moyen. Donner une approximation de celui-ci.*

Exercice 40 *Loi géométrique 2*

1. On jette un dé équiprobable à 6 *faces. Calculer le temps d'attente moyen avant d'obtenir les* 6 *numéros.*

2. Combien faut-il réunir de personnes en moyenne pour que les 365 *jours de l'année soient des dates anniversaires?*

Exercice 41 *Loi de Poisson 1*

1. Dans une loterie chaque tirage donne une probabilité $p = 0.01$ *de gagner. On achète* 50 *billets: calculer la probabilité de gagner au moins une fois.*

2. Dans un régiment de 500 *soldats chaque individu est porteur d'une certaine maladie avec la probabilité* $p = 0.001$*. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins deux soldats malades.*

Exercice 42 *Loi de Poisson 2*

1. Sur une autoroute il y a en moyenne 2 *accident par jours. On suppose que le nombre d'accidents est un processus de Poisson. Calculer la probabilité qu'il y ait plus d'un accident:*

(i) par jour *(ii) par heure*

2. Dans un casino les gens rentrent au rythme moyen d'une personne toute les deux minutes. On suppose qu'il s'agit d'un processus de Poisson: quelle est la probabilité que personne n'entre entre 12h et 12h05 ?

N2

Exercice 43 *Loi géométrique*

On considère une pièce non équiprobable et on note p la probabilité d'obtenir PILE à chaque jet.

1. On jette la pièce un nombre indéterminé de fois. On note X_1 le temps d'attente du premier PILE, X_2 le temps d'attente entre le premier PILE et le second, et X le temps d'attente avant d'obtenir deux PILE. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X et calculer l'espérance de X.

2. On jette la pièce jusqu'à obtenir PILE pour la deuxième fois et on note Y le nombre de FACE obtenus. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

Exercice 44 *Loi de Poisson*

On note S_n la VA "nombre de points fixes d'une permutation de E_n": on admet que, si n est grand, S_n suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

1. Dans une salle 10 personnes sont assises sur 10 chaises: elles se lèvent puis se rassoient au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins une personne se rasseye sur la chaise qu'elle occupait.

2. Pour tester la compétence d'un étudiant on lui propose un QCM comportant 10 questions ainsi que les 10 réponses dans un ordre aléatoire: on demande à l'étudiant d'associer une réponse à chaque question et on note X la VA "nombre de bonnes associations".

(i) Déterminer la loi de X.

(ii) On suppose que l'étudiant donne k bonnes associations: on considère que le test est positif si la probabilité d'obtenir au hasard un résultat au moins aussi bon est inférieure à 5%. Déterminer le nombre minimum de bonnes associations nécessaire pour réussir le test.

Exercice 45 *Loi binomiale négative*

On effectue une suite indéterminée d'épreuves de Bernouilli indépendantes de même paramètre p : on s'intéresse au "temps d'attente pour obtenir r succès" et on note $q = 1 - p$. Le résultat de cette expérience est représenté par une variable $T(r)$, qui peut prendre toutes les valeurs entières $r, r+1, ...$

1. (i) Montrer que $\mathrm{pr}(T(r) = n) = \binom{n-1}{r-1}.p^r q^{n-r}$.

(ii) On pose $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$ pour tout réel α. Montrer que $\binom{n-1}{r-1} = (-1)^r \binom{-r}{n-r}$.

2. On note X_k le temps d'attente du k-ème succès sachant qu'on en a déjà obtenu $k-1$.

(i) Déterminer la loi de X_k et montrer que les VA $X_1, ..., X_r$ sont indépendantes.

(ii) Exprimer $T(r)$ en fonction des X_k puis calculer $E(T(r))$ et $\sigma(T(r))$.

Variables aléatoires continues

N1

Exercice 46 *Fonction de répartition et densité*
La densité d'une VA X est donnée par

$$p(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0.375 & si\ 0 \le x < 2 \\ 0.25 & si\ 2 \le x < 3 \\ 0 & si\ 3 \le x \end{cases} .$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X puis tracer les graphes de p et F.

2. Calculer $\mathrm{pr}(X < 2)$ *ainsi que* $\mathrm{pr}(1 < X < 2.25)$.

Exercice 47 *Loi uniforme 1*

1. Un homme tire sur une cible circulaire de 10 *cm de rayon: il gagne* 10 *points si son coup est à moins de* 1 *cm du centre,* 5 *points s'il s'en éloigne de* 1 *à* 3 *cm et* 3 *points s'il s'en éloigne de* 3 *à* 5 *cm. Calculer son espérance de gain en admettant que la distance du tir au centre est une VA uniforme sur* $[0, 10]$.

2. Un usager se présente à un arrêt de bus à 10h et l'instant d'arrivée du bus est une VA uniformément distribuée entre 10h et 10h30. Calculer la probabilité que l'usager attende plus de 10 *minutes, puis la probabilité d'attendre* 10 *minutes supplémentaires sachant qu'il en a déjà attendu* 10.

Exercice 48 *Loi uniforme 2*

Deux personnes ont rendez-vous entre 13h et 14h: le premier arrivé attend 6 minutes et s'en va si le second n'est pas arrivé dans cet intervalle de temps. On suppose que les instants d'arrivée X_1, X_2 (en heures) des deux personnes sont indépendants et uniformément distribués sur l'intervalle $[13, 14]$ *: la variable* (X_1, X_2) *représente alors un point aléatoire du carré* $[13, 14] \times [13, 14]$ *et on admet que celui est encore uniformément distribué dans le carré. Calculer la probabilité d'une rencontre.*

Exercice 49 *Loi exponentielle 1*

1. La durée (en mn) d'une conversation téléphonique est une VA exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$. Un individu attend devant une cabine qui vient d'être occupée. Calculer la probabilité qu'il attende au moins 10 *minutes.*

2. La durée de vie (en milliers de kms) d'un véhicule est une VA exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-5}$. Calculer la probabilité qu'une voiture puisse encore rouler 50000 *kms sachant qu'elle en a déjà fait* 50000 ?

Exercice 50 *Loi exponentielle 2*

Dans un pays le nombre de secousses sismiques est un processus de Poisson: on suppose qu'il y a en moyenne $\lambda = 2$ secousses par semaine.

1. On note $X(t)$ le nombre de secousses par période de t semaines: déterminer la loi de $X(t)$.

2. On note T_1 le temps d'attente avant la prochaine secousse, T_2 le temps d'attente entre la première et la deuxième secousse et T le temps d'attente avant la deuxième secousse.

(i) Déterminer les fonctions de répartition et densités de T_1, T_2 et T.

(ii) Exprimer T à l'aide de T_1, T_2. Calculer $E(T)$ et $\sigma^2(T)$.

N2

Exercice 51 *Loi exponentielle*

On considère deux composants électroniques: on note T_k *la VA "durée de vie du composant k" et on suppose que* T_k *suit la loi exponentielle de paramètre* λ_k $(k = 1, 2)$. *On note* $T_{\min} = \min(T_1, T_2)$ *et* $T_{\max} = \max(T_1, T_2)$ *les durées de vie des systèmes obtenus lorsque les composants sont en série et lorsqu'ils sont en parallèle.*

1. Donner la fonction de répartition et la densité de ces deux variables. S'agit-il de lois connues?

2. Calculer l'espérance de $T_{\min}$ *et* $T_{\max}$.

Loi normale

N1

Exercice 52 *Loi normale 1*

Soit X *une VA normale de paramètres* $\mu = 10, \sigma = 6$. *Calculer les probabilités suivantes:*

(i) $\mathrm{pr}(X > 5)$ *(ii)* $\mathrm{pr}(4 < X < 16)$ *(iii)* $\mathrm{pr}(X < 8)$

(iv) $\mathrm{pr}(|X - 10| < 9)$ *(v)* $\mathrm{pr}(|X - 10| > 21)$

Exercice 53 *Loi normale 2*

Dans un pays la quantité annuelle de précipitations (en cm) est une VA X *de loi normale* $\mathcal{N}(140, 4)$.

Calculer la probabilité que X *soit inférieur à* 150, *puis la probabilité qu'il faille attendre plus de* 10 *ans pour que l'on ait* $X > 150$.

Exercice 54 *Loi normale 3*

Une machine-outil taille une fente dans des pièces de métal: la largeur de la fente est une VA X *de loi normale d'espérance* $\mu = 2$ *et écart-type* $\sigma = 0.006$.

1. Les limites de tolérance sont $2 \pm 0,012$. *Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses?*

2. Quelle doit être la valeur maximale de σ *si l'on veut que ce pourcentage ne dépasse pas* 1% : *on suppose que* X *suit toujours la loi normale d'espérance* 2 *et d'écart-type* σ *inconnu.*

Exercice 55 *Approximation normale 1*

Dans une population bovine on admet que la robe d'un animal dépend de la présence d'un gène dominant S (robe unie) ou d'un gène récessif s (robe tachetée): l'accouplement d'animaux donne $3/4$ *de robes unies et* $1/4$ *de robes tachetées. On étudie un échantillon de* 160 *bovins issus de croisements* $(S, s) \times (S, s)$ *et on note* X *le nombre d'animaux ayant une robe tachetée.*

Déterminer la loi de X *et donner son approximation normale. Utiliser cette dernière pour calculer la probabilité que le nombre de bovins à la robe tachetée soit compris entre* 35 *et* 50.

Exercice 56 *Approximation normale 2*

On sait qu'un analgésique A a un effet positif dans 75% *des cas sur une population donnée. On teste A sur un échantillon de taille* 200 *dans cette population et on note* F *la fréquence des résultats positifs.*

Déterminer la loi de F et donner son approximation normale. Utiliser cette dernière pour déterminer l'intervalle centré en $p = 0.75$ qui contient F avec une probabilité de 95%.

Table de la loi normale

Fonction de répartition Π de la loi normale

Valeurs x de la variable inférieures à 2

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Valeurs x de la variable supérieures à 2

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
Π (x)	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938'	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π (x)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Indications pratiques

1. Pour un nombre x compris entre 0 et 2 et donné avec 2 décimales, Π (x) se trouve à l'intersection de
– la ligne où figure le nombre immédiatement inférieur à x,
– la colonne où figure la deuxième décimale de x.
Par exemple si $x = 1{,}57$, on lit Π $(x) = 0{,}9418$ dans la ligne 1,5 et la colonne 0,07.
2. Pour un' nombre négatif, on prend le complément à 1 du nombre lu dans la table.
Par exemple si $x = -1{,}57$, on prend Π $(x) = 1 - 0{,}9418 = 0{,}0582$.
3. Le nombre $t(p) = \Pi^{-1}$ $(1 - p)$ s'obtient en cherchant dans la table la valeur de x pour laquelle Π $(x) = 1 - p$ ou plutôt les deux valeurs les plus voisines et en faisant une interpolation linéaire.
4. Dans la règle de décision relative à un test de niveau α, on utilise souvent le nombre $t(\alpha)$ si le test est unilatéral et le nombre $t(\alpha/2)$ dans les autres cas. Les valeurs correspondant aux niveaux α les plus fréquemment utilisés sont :

α	0,2	0,1	0,05	0,01	0,001
$t(\alpha)$	0,8416	1,2816	1,6449	2,3263	3,0902
$t(\alpha/2)$	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905