Exercices d'Analyse

1 Révisions

1.1 Sommes et récurrences *

1. Soient 2 suites u_n et v_n, que signifie $u_n \sim v_n$ pour $n \to +\infty$? Calculer la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n} k$ pour $n \geq 1$ et donner l' équivalent de A_n pour $n \to \infty$.

2. Parmi ces relations démontrer par un raisonnement par récurrence les relations qui sont vraies:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+3)}{3}, \qquad n \geq 1.$$

3. Vérifier l'identité

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

après avoir écrit explicitement la somme. Ecrire cette formule pour $n = 2$, 3 et $n = 4$. En déduire la relation

$$G_n(x) \equiv 1 + x + x^2 + \cdots x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad x \neq 1.$$

Que vaut cette somme pour $x = 1$?

4. Soit θ un réel tel que $\theta \geq -1$. Montrer par récurrence

$$(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire que si $x > 1$ on a $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = +\infty$. On posera $x = 1 + \theta$.

1.2 Fonctions *

1. Déterminer les racines de $x^3 - 3x + 2 = 0$. Donner le domaine de définition maximal des fonctions

$$x \to f(x) = \ln(x-1), \qquad x \to f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}, \qquad x \to f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}.$$

2. Rappeler les formules d'addition $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$. En déduire la formule d'addition $\tan(a+b)$.

3. Exprimer $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan^2 x$.

4. En utilisant les formules d'addition des sinus et cosinus linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$. En déduire les primitives de ces fonctions. Calculer leur valeur moyenne définie par

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx.$$

5. Déterminer les primitives de $\sin^3 x$ et $\cos^3 x$.

2 Exercices à rédiger

2.1 Polynômes et racines

1. Soient r_1 et r_2 les deux racines du trinome $x^2 + ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de a et b et en déduire $r_1^2 + r_2^2$.

2. Soit l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$. Montrer qu'elle est du second degré en variable $u = x + \dfrac{1}{x}$. Montrer que l'équation de départ est ainsi ramenée à la résolution de deux équations du second degré, sans finir le calcul en détail.

2.2 Etude de fonctions

1. Soit la fonction $x \to f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Donner le domaine de définition de f, calculer sa dérivée f' et son domaine de définition, tableau de variations, asymptotes et graphe. On admettra la relation

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + x\,\epsilon(x), \qquad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

2. Mêmes questions pour la fonction

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

2.3 Fonctions symétriques des racines

1. Soit l'équation du troisième degré $P(x) \equiv x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à coefficients réels et avec $d \neq 0$. Pourquoi impose-t-on cette dernière condition? On note ses racines r_1, r_2, r_3. Comment se factorise $P(x)$ en termes de ses racines?

2. Exprimer les trois "fonctions symétriques des racines" définies par

$$\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3, \qquad \sigma_2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1, \qquad \sigma_3 = r_1 r_2 r_3$$

en fonction des coefficients b, c, d.

3 Limites, continuité

3.1 Intervalles

1. Déterminer les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes:

$$|x-1| \leq 4, \qquad 2\sqrt{2x - x^2} < 1, \qquad \sqrt{x+1} < 1, \qquad |x + |x|| \geq 2,$$

Lesquelles sont des intervalles?

2. On considère les intervalles $A =]-\infty, -1]$, $B = [-1, 3]$, $C =]-1, 5[$. Déterminer les ensembles

$$A \cap B, \qquad C \cap A, \qquad B \cap C, \qquad B \cup C, \qquad A^c, \qquad A^c \cup C^c,$$

(les complémentaires sont pris par rapport à $\mathbb{R}$) et préciser ceux qui sont des intervalles.

3.2 Calculs de limites $*$

Trouver les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1},$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1}, \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^4}\right), \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

3.3 Domaines et intervalles $*$

1. Donner le domaine de définition maximal D_f, le domaine Imf et le domaine de continuité des fonctions suivantes:

$$x \to f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad x \to f(x) = \sqrt{x^3-1}, \qquad x \to f(x) = \sqrt[3]{1-x^2},$$

$$x \to f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \qquad x \to f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

2. Déterminer Imf pour les fonctions

$$f = \cos, \quad D_f = \mathbb{R}, \qquad f = \sin, \quad D_f =]0, 2\pi[, \qquad x \to f(x) = 4x(1-x), \quad D_f = [0, 1[.$$

3. Donner des exemples de fonctions continues, lorsque c'est possible, qui transforment l'intervalle I en $f(I) = J$ dans les cas suivants:

$$I = \mathbb{R} \ \to \ J = [0, +\infty[, \qquad I = [0, 1] \ \to \ J =]2, 4], \qquad I = [0, 1[\ \to \ J = [0, 1],$$

$$I = \mathbb{R} \ \to \ J = [-1, +1], \qquad I =]0, 2\pi[\ \to \ J = [-1, 1]$$

3.4 Séparation des racines $*$

Rappeler l'énoncé précis du théorème des valeurs intermédiaires. On considère le polynôme $x \to P(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$. Montrer qu'il a trois racines réelles et donner, pour chacune de ces racines, un encadrement par des entiers (ne pas utiliser la dérivée).

3.5 Prolongement par continuité $*$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère la fonction

$$x \to f(x) = \frac{x^6 + ax + b}{x^2 - 1}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer son domaine de définition D_f pour des valeurs génériques des paramètres a, b.

2. Déterminer a et b en fonction de n pour que l'on puisse prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ dans tout $\mathbb{R}$. Définir précisément l'extension $(\tilde{f}, D_{\tilde{f}} = \mathbb{R})$.

3.6 Fonctions réciproques $**$

1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui admettent une fonction réciproque

$$x \to |x| \quad x \in \mathbb{R}, \qquad x \to x - \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad x \to x^{1/2} \quad x \in \mathbb{R}_+, \qquad x \to x^3 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lorsque c'est possible, donner la fonction réciproque en précisant son domaine et son image.

2. Que peut-on dire de la fonction réciproque d'une fonction périodique? D'une fonction constante? D'une fonction paire?

3. Soit f une bijection impaire de $[-1, 1]$ dans $[-r, +r]$ avec $r > 0$. Peut-on dire que f^{-1} est impaire et sur quel intervalle?

4. Soit la fonction $f(x) = x - 1/x$ avec $x > 0$. Déterminer Im f. Montrer que c'est une bijection D_f sur Im f et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} ainsi que $D_{f^{-1}}$ et Im f^{-1}.

5. Soit la fonction

$$x \to f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}, \qquad x \in]-1, +1[.$$

Montrer que la fonction réciproque f^{-1} existe, puis la calculer. Préciser $D_{f^{-1}}$ et Im f^{-1}.

6. Simplifier $\arcsin(\cos x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Simplifier $\sin(\arccos x)$ pour $x \in [-1, +1]$, comparer avec $\cos(\arcsin x)$. Simplifier $\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$.

4 Exercices à rédiger

4.1 Limites, domaines

1. Déterminer les limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1-3x}{x^2+3x^3},\qquad \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a>0,\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$$

Il sera utile d'établir l'identité trigonométrique:

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{(a-b)}{2}\cos\frac{(a+b)}{2}.$$

2. Donner le domaine de définition maximal D_f, le domaine Imf et le domaine de continuité des fonctions suivantes:

$$x\to f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}-2},\qquad x\to f(x)=\sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$$

4.2 Partie entière

Rappeler la définition de la fonction partie entière de x, notée $E(x)$. On demande:

1. Calculer $E(2,9)$, $E(2+)$, $E(2-)\,E(-3,5)$, $E(-3+)$, $E(-3-)$. Montrer, à partir de la définition de $E(x)$, les inégalités $x-1<E(x)\le x$.

2. On considère la fonction $f(x)=x-E(x)$. Pour tout intervalle de la forme $]n,n+1[$ avec $n\in\mathbb{Z}$, donner la forme explicite de la fonction $f(x)$ restreinte à cet intervalle. En déduire ses points de discontinuité et dessiner son graphe. Quelle est sa période?

4.3 Parité

1. Soit f impaire sur $]-r,+r[$ avec $r>0$. Montrer que si f a une limite pour $x\to 0$, alors cette limite est nulle.

2. Préciser, si elle est définie, la parité des fonctions suivantes:

$$x\to\ln\frac{1+x}{1-x},\ x\in]-1,+1[,\qquad x\to e^{x-1/x},\qquad x\to|x+1|+|x-1|,\qquad x\to|x^2-x|$$

$$x\to\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\qquad x\to|x+1|+|x|-|x-1|,\qquad x\to\cos x,\ x\in[0,\pi].$$

3. Si f et g ont une parité définie, $g\circ f$ a-t-elle une parité définie? Si oui, laquelle?

Cet exercice illustre l'utilité de l'approche séquentielle pour démontrer des résultats de non-continuité.

4.4 Etude de fonctions

1. Etudier les fonctions

$$x\to f(x)=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1},\qquad x\to g(x)=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

et représenter sur le même graphe $g(x)$ et $-g(x)$. La courbe ainsi obtenue s'appelle une strophoïde.

2. Simplifier ou vérifier

$$\cos(2\arctan x),\qquad \arctan(1+x)-\arctan x=\arctan\frac{1}{1+x+x^2},\quad x\ge 0,\qquad 2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}.$$

4.5 Fonctions réciproques

Résoudre les équations

$$2\arcsin x = \arccos x, \quad \arcsin x = 4\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arcsin x = \arcsin\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{5}, \qquad x \in [-1, 1].$$

5 Prolongement par continuité

Soit la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

1. En explicitant les theorèmes du cours utilisés, étudier la continuité de f pour $x \in D_f$.

2. La limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe-t-elle? Si c'est le cas donner sa valeur.

3. Peut-on prolonger f définie sur $\mathbb{R}^*$ en une fonction $\widetilde{f}$ qui serait continue sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, expliciter $\widetilde{f}(x)$ pour $x \neq 0$ et $\widetilde{f}(0)$.

5.1 Injection, surjection

Montrer que

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

4. Soit la fonction $x \to f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ avec $D_f = [1, \infty[$. Déterminer $\operatorname{Im} f$. On considére alors $f: D_f \to \operatorname{Im} f$. Est-elle injective? surjective? bijective?

6 Dérivées

6.1 Dérivées diverses $*$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité pour $x \in \mathbb{R}$ des fonctions

$$x \to |x|, \qquad x \to \sin^2 x, \qquad x \to |\sin x|.$$

2. Simplifier la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et de $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ pour $x > 1$.

3. Soit la fonction $x \to f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$. Quel est son domaine de définition maximal D_f? Etudier les variations de f pour $x \in D_f$. Graphe. Donner une expression simple pour f.

4. Calculer les dérivées nièmes de x^p pour $p \in \mathbb{N}$ et de $\dfrac{1+x}{1-x}$.

5. Soit une fonction C^1 de parité définie sur $I = [-r, +r]$, $r > 0$. Que peut-on dire de la parité de sa dérivée?

6. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction $T-$périodique. Sa dérivée est elle $T-$périodique?

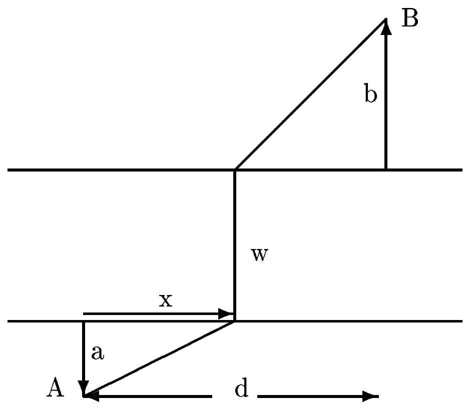
6.2 Limites

En utilisant la définition de la dérivée déterminer les limites

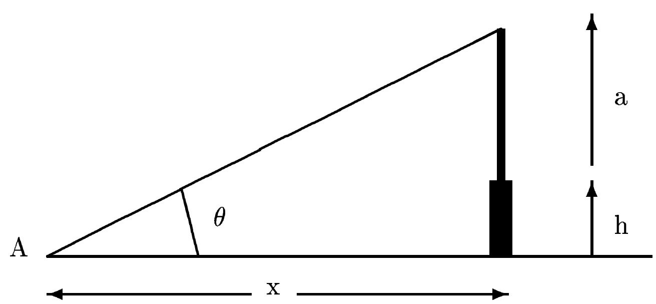
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

6.3 Extrema $*$

1. Soient deux villes A et B séparées par un fleuve de largeur w. Déterminer la position x du pont qui doit relier les deux villes de façon à minimiser la distance de parcours entre celles-ci.



2. Soit un piédestal de hauteur h, sur lequel est posée une statue de hauteur a. A quelle distance du piédestal faut-il se placer pour voir la statue sous l'angle maximal?



6.4 Fonctions réciproques $**$

1. Soit la fonction $x \to (x^2-1)^2$ avec $D_f = [-1,1]\cup[1,\infty[$. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$. Est-ce une bijection de $D_f \to \mathrm{Im}\, f$? Montrer qu'en gardant la même fonction, mais en restreignant convenablement le domaine de définition, on peut retrouver la bijection. Examiner les deux cas possibles, en précisant à chaque fois le domaine de définition et l'image, puis en donnant la forme explicite de la fonction réciproque. Déterminer ensuite leurs dérivées en précisant leur domaine de définition et leur image.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on les relations

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \arcsin(\sin x) = x\ ?$$

On définit la fonction $x \to f(x) = \arcsin(\sin x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, sa parité et sa période. Sur quel domaine est-elle continue? Dérivable? Etudier ses variations et dessiner son graphe.

6.5 Fonction réciproque et dérivation $**$

Soit la fonction $x \to f(x) = \arcsin(e^{-x})$, bijection continue décroissante de $D_f = \mathbb{R}_+ \ \to \ \mathrm{Im} f =]0, \pi/2]$.

1. Calculer explicitement f^{-1} et donner $D_{f^{-1}}$ et $\mathrm{Im} f^{-1}$. La fonction f^{-1} est-elle croissante ou décroissante?

2. Calculer directement la dérivée de f^{-1} en utilisant la forme explicite de f^{-1} obtenue à la question précédente. Sur quel domaine maximal est-elle définie?

3. Donner la formule qui exprime la dérivée d'une fonction réciproque $(f^{-1})'$.

4. En utilisant cette formule, vérifier la dérivée de f^{-1} obtenue à la question 2.

6.6 Accroissements finis

1. Soit la fonction $x \to x^2$ pour $x \in [a, b]$, un compact de $\mathbb{R}$. Ecrire, après avoir rappelé les hypothèses de validité, le théorème des accroissements finis. On se propose de déterminer la valeur du paramètre c; pour cela on pose $a = x$, $b = x + h$ et $c = x + \theta h$. Déterminer la valeur de h.

2. Mêmes questions pour la fonction $x \to 1/x$ pour $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+^\star$.

3. Démontrer les inégalités:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x \geq 1 + x, \qquad \forall x \in [0, +\infty[: \quad \sin x \leq x,$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x, \qquad \forall x \in]0, 1[\quad \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7 Exercices à rédiger

7.1 Continuité

1. Donner le domaine de définition maximal D_f des fonctions suivantes:

$$\ln(\ln x), \qquad (\ln x)^2, \qquad e^{\sin x}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\sin x}}, \qquad \tan(e^{2x})$$

2. Calculer leurs dérivées et préciser leur domaine maximal de définition et de continuité.

3. Etudier les variations des fonctions

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}, \qquad \sqrt[3]{1-x^3}.$$

4. Quels intervalles de définition D_f est-il possible de choisir de façon que leurs fonctions réciproques existent?

7.2 Fonctions réciproques

Simplifier les fonctions suivantes

$$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), \qquad arccos(4x^3 - 3x), \qquad \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

Ces questions complètent la question 3 de l'exercice (6.1).

7.3 Extremum

On considère l'ellipse déquation cartésienne

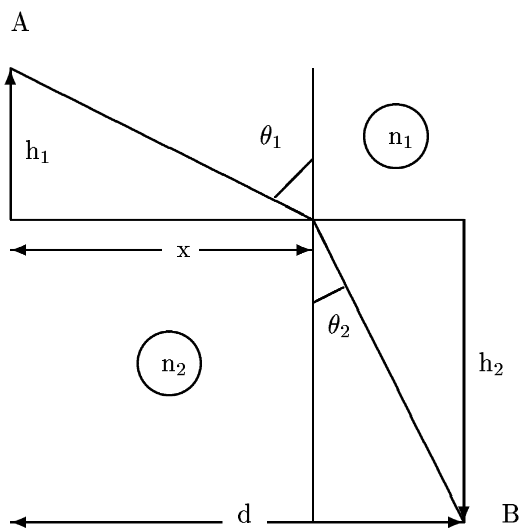
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0.$$

Graphe de cette ellipse. On veut inscrire un rectangle, dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy et dont les sommets sont sur l'ellipse, de façon que sa surface soit maximale. Déterminer la longueur et la largeur du rectangle de surface maximale. Comparer cette surface à celle de l'ellipse.

7.4 Loi de Descartes

Un faisceau lumineux incident (angle θ_1 par rapport à la normale au plan d'incidence) se propage à la vitesse v_1 dans le milieu de gauche et à la vitesse v_2 dans le milieu de droite (angle θ_2 par rapport à la normale). Exprimer le temps de parcours total entre le point A et le point B en fonction de x, d, h_1 et h_2. Déterminer la condition pour que ce temps soit extrêmal. Vérifier que sous cette condition on retrouve la relation de Snell-Descartes $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Les indices de réfraction sont définis par $n_1 = \frac{c}{v_1}$ et $n_2 = \frac{c}{v_2}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Montrer que si $n_1 < n_2$ la réfraction est toujours possible, alors que pour $n_1 > n_2$ il existe un angle critique θ_c pour lequel la réfraction reste possible. Si l'angle d'incidence est supérieur à θ_c alors la lumière subit alors une réflexion.



7.5 Fonction réciproque et dérivation

1. Soit la fonction $x \to f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Montrer que c'est une bijection de $D_f =]-\infty, 1[$ sur $\operatorname{Im} f =]-1, +\infty[$.

2. Montrer que $f^{-1} = -\dfrac{1}{f}$ et donner $D_{f^{-1}}$ et $\operatorname{Im} f^{-1}$.

3. Calculer directement la dérivée de f^{-1} pour $x \in D_{f^{-1}}$.

4. Rappeler la formule générale qui donne la dérivée d'une fonction réciproque et sa condition de validité.

5. Calculer à nouveau la dérivée de f^{-1} en utilisant cette formule et comparer au résultat du calcul direct obtenu à la question 3.

7.6 Equation fonctionnelle

Soit $f(x)$ une fonction $C^1(\mathbb{R})$ avec $f(0) \neq 0$. On se propose de résoudre l'équation

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que $f(-x) = 1/f(x)$.

2. En prenant $y = \epsilon$ et en faisant tendre ϵ vers 0, montrer que l'on a

$$f'(x) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = f(x) f'(0).$$

En déduire $f(x)$. Quelle est l'interprétation géométrique du paramètre libre $f'(0)$?

Remarque: On peut montrer que ce résultat reste valable sous la seule hypothèse de *continuité* de f.

8 Formules de Taylor et Développements limités

8.1 Quelques limites **

Utiliser les DL pour calculer les limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x[\ln(1+\sin x)-\tan x]}{\sin x-\tan x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right).$$

8.2 Calcul de quelques DL **

1. Calculer les DL suivants

$$DL(4,0)\quad \ln(\cos x),\quad DL(4,0)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad DL(3,0)\quad \sqrt{1+x}\ln(1+x),\quad DL(4,0)\quad \frac{1}{\sin(x+\pi/4)},$$
$$DL(4,0)\quad e^{2x-x^2},\quad DL(4,0)\quad e^{\sqrt{\cos x}},\quad DL(4,0)\quad \frac{\operatorname{sh} x}{1-\ln(1+x)},\quad DL(4,0)\quad e^{\arcsin x}-e^{\sin x}.$$

2. Déterminer l'équivalent, lorsque $n\to+\infty$, de la suite (u_n) définie par

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \qquad S_n=(n+1/2)\ln(n)-n-\ln(n!).$$

8.3 Recherche d'asymptotes *

Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes et préciser leur position par rapport à la fonction conidérée:

$$x\to f(x)=\frac{x^2}{x^2-1},\qquad x\to f(x)=x\operatorname{th} x,\qquad x\to f(x)=x+\sqrt{\frac{x^3-3x^2-2x+1}{x+1}}.$$

8.4 Equivalents *

Donner un équivalent, lorsque $x\to 0$ pour les fonctions

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}-1,\qquad \sqrt{1+x-x^2}-\sqrt[3]{1-2x+3x^2},\qquad a^x-1,\quad a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}.$$

8.5 DL décalés

1. Donner le DL(4, 1) de e^x.
2. Donner le DL$(5,\pi/2)$ de $\cos x$.
3. Donner le DL$(4,\infty)$ de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

8.6 Points d'inflexion

Déterminer les (éventuels) points d'inflexion des fonctions suivantes:

$$x\to f(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad x\to f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}},\qquad x\to f(x)=\sqrt[3]{x+2}.$$

9 Exercices à rédiger

9.1 Limites

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x-(e^x-1)^2}{\sin^3 x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

9.2 Equivalents

1. Déterminer les paramètres a et b de façon que, pour $x \to 0$, les expressions suivantes soient d'ordre le plus élevé possible en x:

$$e^x - \frac{1+ax}{1+bx}, \qquad \ln\frac{1+x}{1-x} - x\frac{(2+ax^2)}{1+bx^2}.$$

2. Trouver un équivalent, pour x au voisinage de $x=2$, de l'expression

$$y(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} - \frac{3}{2},$$

et determiner $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{y}{x-2}$.

3. Pour $x>0$ on définit

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = f(x)^x.$$

Montrer que pour $x \to +\infty$ on a $f(x) \sim e$ mais que $g(x) \not\sim e^x$.

9.3 Asymptotes

1. Déterminer les asymptotes pour $x \to +\infty$ des fonctions suivantes et préciser leur position par rapport à la fonction conidérée:

$$\frac{x^3+x}{x^2-1}, \qquad \sqrt[3]{x^3-3x+2}, \qquad x - \arctan\frac{x+1}{x}.$$

2. Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes et préciser leur position par rapport à la fonction conidérée:

$$x \to f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}, \qquad x \to f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-3}}, \qquad x \to f(x) = x^2-3x+2-\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}.$$

9.4 Inégalités

Utiliser la formule de Taylor pour justifier les inégalités

$$e^x \geq 1+x \quad x\in\mathbb{R}, \qquad \cos x \geq 1-\frac{x^2}{2} \quad x\in[0,\pi], \qquad \ln(1+x) \geq x-\frac{x^2}{2} \quad x \geq 0.$$

10 Intégrales et primitives

10.1 Surfaces *

1. Calculer la surface comprise entre la parabole $f(x)=x^2$ et la droite $f(x)=x$ pour $x\in[0,1]$.

2. Calculer la surface de l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, \quad b>0.$$

Vérifier que pour $a=b=R$ on rerouve la surface du cercle.

10.2 Primitives $**$

Calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\frac{1}{x^2-1}, \qquad \frac{4}{x^3+4x}, \qquad \sin^2 x, \qquad \cos^3 x, \qquad \sin^4 x, \qquad x\, e^{x^2}$$

$$(\tan x)^4, \qquad x^n \ln x, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \arctan x, \qquad e^{ax+i\omega x}, \quad a,\ \omega \in \mathbb{R},$$

dans cette dernière quelles relations obtient-on en utilisant la formule de Moivre?

10.3 Intégrales $**$

Etudier l'existence des intégrales suivantes, et les calculer si elles existent

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^3 x \, \cos x \, dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x+ia}, \quad a>0, \qquad \int_0^\pi \sin^2 x \, \cos^2 x \, dx, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\cos^2 x} \quad 0<a<1 \quad (u=\tan x), \qquad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan^2 x}, \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \quad (u = \tan\frac{x}{2}).$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-\lambda^2x^2}\, dx \quad (u=1-\lambda^2x^2), \qquad \lim_{a\to 1-}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Les relations suivantes sont utiles:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

10.4 Valeur moyenne $*$

Soit $f(x)$ une fonction continue périodique, de période T. On définit sa valeur moyenne comme l'application qui à $f(x)$ associe le réel $\overline{f(x)}$ défini par

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la valeur moyenne est une application linéaire.

2. En séparant l'intervalle d'intégration en $[a,0]\cup[0,T]\cup[T,T+a]$, montrer que la valeur moyenne est indépendante du choix de a. On peut donc prendre $a=0$.

3. Calculer les valeurs moyennes de

$$1, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sin x\, \cos x, \quad \sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad \sin^2 x\, \cos^2 x.$$

4. Au vu des exemples précédents, la valeur moyenne d'un produit de fonctions périodiques de même période est-elle toujours égale au produit des valeurs moyennes?

11 Exercices à rédiger

11.1 Formule de Wallis

John Wallis (anglais,1616-1703) a obtenu un produit infini qui converge vers π par les considérations suivantes.

1. Montrer l'égalité

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Calculer W_0 et W_1.

3. En intégrant par parties, montrer la relation

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

4. En déduire la forme explicite en n de W_{2n} et de W_{2n+1}.

5. Etablir les inégalités

$$1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n},$$

et en déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$, ce qui donne la formule de Wallis

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty} (2n+1) \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}\right]^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right). \qquad (2)$$

11.2 Suite d'intégrales

On définit la suite numérique

$$I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt, \qquad n \in \mathbb{N}^\star$$

1. Montrer que I_n existe $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. Montrer les inégalités $I_n \geq I_{n+1} \geq 0$.

4. En déduire un encadrement de I_n qui permet de déterminer sa limite pour $n \to +\infty$. Quelle est cette limite?

11.3 Longueur curviligne

Soit un morceau de courbe d'équation cartésienne $y(x)$ pour $x \in [a, b]$. On admettra que la longueur curviligne (c'est à dire mesurée par un mètre qui épouserait la forme de la courbe) est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx.$$

1. Pour un cercle centré sur l'origine et de rayon R, déterminer la longueur du quart de cercle situé dans le premier quadrant. On précisera $y(x)$ et les valeurs de a et b.

2. Longueur curviligne de la parabole $y = ax^2$ avec $a > 0$ entre $x = 0$ et $x = l$.

3. Longueur curviligne de la chaînette $y(x) = R \,\mathrm{ch}\,(x/R)$ entre $x = -l$ et $x = +l$.

11.4 Divers

1. Calculer les intégrales ou primitives suivantes:

$$\int_0^{\pi/3} \cos 3x \, dx, \quad \int_0^{\pi/3} \cos^3 x \, dx, \quad \int_0^{\pi/3} (1 + \tan^2 u) \, du, \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \tan x \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad \int_1^e t^2 \ln t \, dt, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\mathrm{ch}\, x} \, dx, \quad \int_1^2 x\sqrt{x+2} \, dx, \quad \int_0^2 x e^{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1+\tan^2 x+\cos(3x))dx, \quad \int(x^2\sqrt{x}+e^{2x})dx, \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/3}\cos^3 x\,\sin^2 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi/3}\cos^4 x\,\sin x\,dx, \qquad \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^5 x\,\sin^7 x\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} e^{2\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

2. On considère l'intégrale

$$I(a)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+2ax+1}, \qquad a\in\mathbb{R}.$$

Montrer que si $a\in I$, avec $I=]-1,1[$ alors $I(a)$ existe. Transformer cette intégrale par le changement de variable $u=\dfrac{x+a}{\sqrt{1-a^2}}$. On veillera à simplifier les bornes et l'intégrand. Utiliser la relation $\arctan\lambda+\arctan\frac{1}{\lambda}=\pi/2$, valable si $\lambda>0$, pour montrer que $I(a)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}$.

3. Discuter, selon les valeurs des paramètres réels a et b, les primitives

$$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}.$$

12 Equations différentielles

12.1 Equations du premier ordre $**$

1. Intégrer les équations différentielles:

$$y'-2xy=0, \quad x\in\mathbb{R}, \qquad xy'-y=0, \quad x>0.$$

2. Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$y'-2y=3x, \quad y'-2y=e^{-3x}, \quad y'-2y=e^{2x}, \quad y'-2y=\cos 3x, \quad y(0)=1.$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante ou bien chercher une solution particulière de la forme

$$\alpha x+\beta, \quad \alpha e^{-3x}, \quad \alpha x e^{2x}, \quad \alpha\sin 3x+\beta\cos 3x.$$

3. Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$y'+2y=e^x+e^{2x}+e^{3x}, \quad y'-3y=(x^2-x)e^{-3x}, \quad y'-3y=(x^2-x)e^{3x}, \quad y'+4y=\cos 2x-\sin 3x,$$

avec la condition initiale $y(0)=0$.

12.2 Equations du second ordre homogènes $**$

Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$2y''+3y'=0, \quad y''+y'-2y=0, \quad y''=4y'-4y, \quad 4y''+4y'+5y=0.$$

Donner dans chaque cas la solution telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

12.3 Equations du second ordre avec second membre $*$

Intégrer les équations différentielles suivantes:

$$y'' + y' - 2y = e^{3x}, \qquad y'' + y' - 2y = 4x^2, \qquad y'' + y' - 2y = \cos x, \qquad y'' + y' - 2y = e^x,$$

$$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}, \qquad 4y'' + 4y' + 5y = e^x, \qquad y'' + y = \cos 2x, \qquad y'' + y = \cos x.$$

13 Exercices à rédiger

13.1 Parachute

Un corps en chute libre, mais freiné par l'air, a pour équation du mouvement selon l'axe Oz

$$\ddot{z} = -\alpha\dot{z} - g, \qquad \alpha > 0, \quad g > 0,$$

où α est le coefficient de frottement dans l'air (supposé constant) et g est l'accélération de la pesanteur.

1. Montrer qu'en variable $v = \dot{z}$ l'équation est du premier ordre.

2. Intégrer celle-ci pour une chute avec vitesse initiale nulle: $v(0) = 0$.

3. Représenter les variations de la vitesse en fonction du temps et montrer que si $t \to \infty$ on atteint une vitesse limite que l'on exprimera en fonction de g et α. Comment varie cette vitesse limite si g augmente (de la Lune à la Terre, par exemple)? Si α augmente (on tombe de l'air dans l'eau, par exemple)?

13.2 Oscillateur harmonique amorti

Soit à résoudre équation différentielle

$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = A\cos(\Omega x), \qquad A,\ \alpha,\ \omega,\ \Omega \in \mathbb{R}.$$

Il est bien plus simple de résoudre

$$z'' + \alpha z' + \omega^2 z = Ae^{i\Omega x},$$

puis en prenant la partie réelle on récupère y.

1. Déterminer z puis y. Discuter selon que $\Omega \neq \omega$ ou $\Omega = \omega$ (résonance).

2. Discuter le cas limite sans amortissement: $\alpha = 0$.

13.3 Désintégrations radioactives

La quantité u d'un élément radioactif évolue temporellement selon la loi:

$$\frac{du}{dt} = -au, \qquad a > o,$$

où a est la constante de désintégration, variable selon la substance considérée. On définit la *période* T comme le temps au bout duquel la quantité u a diminué de moitié. Donner le lien entre T et a. Sachant que pour l'uranium 238 on a $T = 4,5\ 10^9$ ans, combien de temps faut-il pour qu'une quantité d'uranium 238 diminue de 1 % ?

14 Dérivées partielles

14.1 Calculs de dérivées partielles et de différentielles $**$

1. Après avoir déterminé les domaines de définition, calculer les dérivées partielles premiéres et les différentielles des fonctions suivantes:

$$f_1 = ax + by, \qquad f_2 = xy, \qquad f_3 = x/y, \qquad f_4 = e^{xy}, \qquad f_5 = x^2 + y^2.$$

2. On passe aux coordonnées sphériques par

$$\phi : \quad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Exprimer $F(r,\theta) = f \circ \phi(x,y)$. Calculer les dérivées partielles premières et la différentielle des fonctions $F_i = f_i \circ \phi$ pour $i = 1,\, 5$.

14.2 Théorème de Schwartz $**$

Soient les fonction

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \to \ f(x,y) = xy(x^2 - y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \to \ f(x,y) = \sin(x^2 + y^2).$$

1. Calculer les dérivées partielles premières et en déduire la différentielle df.

2. Calculer toutes les dérivées partielles secondes et vérifier l'égalité des dérivées partielles croisées (théorème de Schwartz).

14.3 Extrema locaux $*$

1. Soit un parallélépipède de côtés a, b, h sans couvercle et de volume V fixé. Pour quelles relations entre ces paramètres l'aire latérale plus l'aire du plancher est-elle minimale? Valeur du minimum?

2. Montrer que le produit P de trois réels strictement positifs dont la somme S est fixée est extremal lorsque ces nombres sont égaux. Valeur de P à l'extremum? Nature de l'extremum?

3. Montrer que la somme S de trois réels strictement positifs dont le produit P est fixé est extremale lorsque ces nombres sont égaux. Valeur de S à l'extremum? Nature de l'extremum?

4. Dans le plan xOy on fixe un point $A(a,b)$ avec $a,\, b > 0$. On considère les points $M(x,0)$ et $N(0,y)$. Déterminer les extrema locaux de la fonction définie par la somme des longueurs $AM^2 + AN^2 + MN^2$.