L1 : Fonctions
Partiel du 19 novembre 2004

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

1 Questions diverses

1. Que signifie $f \in C^1(\mathbb{R})$?

2. Enoncer le théorème de Rolle.

3. Soit $x \to f(x)$ une fonction continue et dérivable pour $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $f'(x)$. Utiliser cette définition pour montrer que si f est $T-$périodique, alors f' est aussi $T-$périodique.

4. Soit la fonction $x \to f(x) = xe^{-x}$ sur le domaine $D_f = [0, +\infty[$. Déterminer $\mathrm{Im} f$. Comme application de $D_f \to \mathrm{Im} f$ la fonction f est-elle injective? surjective?

5. Rappeler la relation qui donne la dérivée d'une fonction composée $f \circ u$. Appliquer cette formule au calcul des dérivées des fonctions suivantes (on explicitera f et u dans les deux cas):

$$\arcsin(\sqrt{x}),\ x \in]0,1[, \qquad \ln(\mathrm{ch}\, x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(e^x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière montrer que le résultat s'exprime simplement avec une fonction hyperbolique.

2 Fonction trigonométrique réciproque

1. Rappeler avec précision la définition de la fonction $x \to f(x) = \arctan x$. On donnera D_f et $\mathrm{Im} f$.

2. Quelle est sa dérivée f' pour $x \in D_f$?

3. On définit la fonction

$$x \to g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Calculer sa dérivée g' pour $x > 0$. En déduire que g est une constante que l'on déterminera.

3 Fonction réciproque et dérivation

Soit la fonction $x \to f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, avec $x \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que f est une bijection continue de $[1, +\infty[\to [1, +\infty[$.

2. Calculer explicitement f^{-1} et préciser $D_{f^{-1}}$ et $\mathrm{Im} f^{-1}$.

3. Calculer directement la dérivée de f^{-1} en utilisant la forme explicite de f^{-1} obtenue à la question précédente pour $x > 1$.

4. Donner la formule qui exprime la dérivée d'une fonction réciproque $(f^{-1})'$.

5. En utilisant cette formule, vérifier la dérivée de f^{-1} obtenue à la question 3.

4 Fonctions hyperboliques

1. Rappeler les définitions des fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$, puis montrer que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout x réel.

2. Exprimer $\operatorname{ch} x$ en fonction de $\operatorname{th} x$

3. On note argch la fonction réciproque de la bijection $\operatorname{ch} \ : \quad [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$. Calculer sa dérivée en tout $x \in]1, +\infty[$.