

L1 : Fonctions Examen du 20 janvier 2005

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

1 Questions diverses (sur 5 points)

1. Rappeler la définition de l'application $x \rightarrow f(x) = \arcsin x$ et donner D_f et $\text{Im}f$.
2. Soit $x \rightarrow f(x)$ une fonction $C^0(\mathbb{R})$. On définit $F(x) = \int_0^x f(u)du$. La fonction $F(x)$ est-elle dans $C^1(\mathbb{R})$?

3. Calculer la dérivée de

$$\int_0^{x^2} e^{-u} du.$$

4. Soit la fonction de 2 variables $(x, y) \rightarrow f(x, y) = xy(x^2 - y^2)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, puis vérifier l'égalité des dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (théorème de Schwartz).

2 Fonction réciproque (sur 4 points)

Soit la fonction $x \rightarrow f(x) = \arcsin(e^{-x})$, bijection continue décroissante de $D_f = \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Im}f =]0, \pi/2]$.

1. Calculer explicitement f^{-1} et donner $D_{f^{-1}}$ et $\text{Im}f^{-1}$. La fonction f^{-1} est-elle croissante ou décroissante?
2. Calculer directement la dérivée de f^{-1} en utilisant la forme explicite de f^{-1} obtenue à la question précédente. Sur quel domaine maximal est-elle définie?
3. Donner la formule qui exprime la dérivée d'une fonction réciproque $(f^{-1})'$.
4. En utilisant cette formule, vérifier la dérivée de f^{-1} obtenue à la question 2.

3 Intégrales (sur 3 points)

1. Calculer les intégrales

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \tan^2 x}, \quad \int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx.$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \arctan x dx$$

par une intégration par parties. On détaillera les différentes étapes du calcul.

4 Développements limités (sur 4 points)

1. Donner le DL(2,0) des fonctions

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}^3 x.$$

On donne la relation

$$\operatorname{ch}(3x) = a \operatorname{ch}^3 x + b \operatorname{ch} x,$$

en comparant les DL des 2 membres, déterminer les coefficients a et b .

2. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2 \tan^2 x}.$$

5 Equations différentielles (sur 4 points)

1. Donner la solution générale de

$$y' + 2y = e^{-2x},$$

puis déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

2. Soit l'équation (E)

$$y'' - y' - 2y = 12xe^x.$$

On désigne par (H) l'équation homogène associée. On demande:

- La solution générale y_0 de l'équation (H).
- Une solution particulière y_P de l'équation (E).
- La solution y de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.