

MATHEMATIQUES DE BASE: FONCTIONS

G. VALENT

septembre 2007

Abstract

Ce polycopié donne un résumé des résultats d'analyse qui constituent le cours présenté aux étudiants de l'unité "Fonctions" (L1).

Contents

1	PRÉ-REQUIS	3
1.1	Identités remarquables	3
1.2	Brefs rappels sur les nombres complexes	4
1.3	Fonctions circulaires	5
1.4	Fonctions exponentielle et logarithme	6
1.5	Dérivation	6
1.6	Primitives	7
1.7	Fonctions circulaires et hyperboliques	7
2	QUELQUES PROPRIÉTÉS DES RÉELS	8
2.1	Rappels sur les notations	8
2.2	Quantificateurs	8
2.3	Intervalles	8
2.4	Ouverts, fermés	10
2.5	Partie entière d'un réel	10
2.6	Valeur absolue, norme	11
3	FONCTIONS, LIMITE, CONTINUITÉ	11
3.1	Quelques rappels sur les fonctions	12
3.2	Limite	13
3.3	Prolongement par continuité	16
3.4	LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX	16
3.5	Injection, surjection, bijection, fonction réciproque	16
4	DÉRIVATION	18
4.1	Dérivée: définition	18
4.2	Dérivée: interprétation géométrique.	19
4.3	Dérivée: interprétation mécanique	19
4.4	Dérivée: interprétation chimique	19
4.5	Continuité et Dérivabilité	19
4.6	Calcul des dérivées	19
4.7	Dérivées des fonctions réciproques	20
4.8	Différentielle	20
4.9	Dérivée première et variations	21
4.10	Dérivée seconde et convexité	21
4.11	LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX	22

5	FORMULE DE TAYLOR ET D.L.	23
5.1	Formule de Taylor	23
5.2	Notations o , O et \sim	23
5.3	Pratique des D.L	24
5.4	D. L. de la primitive	25
5.5	D. L. décalés	25
5.6	Quelques D.L. utiles	26
6	PRIMITIVES ET INTÉGRALES	27
6.1	Primitives	27
6.2	Table des primitives	27
6.3	Intégrale	27
6.4	Interprétation géométrique	27
6.5	PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES	27
6.6	Intégrale fonction de sa borne supérieure	28
6.7	Pratique du calcul intégral	28
6.8	Quelques exemples classiques	29
6.9	Fonctions spéciales	31
7	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	31
7.1	Equations linéaires du premier ordre	31
7.2	Equations linéaires du second ordre à coefficients constants	32
8	DÉRIVÉES PARTIELLES, DIFFÉRENTIELLE	33
8.1	Dérivées partielles et différentielle	34

1 PRÉ-REQUIS

1.1 Identités remarquables

Factorisation :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \xrightarrow{(b \rightarrow -b)} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

et de façon plus générale:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Formule du binôme de Newton :

Elle permet de développer les puissances d'une somme:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

De façon plus générale on définit les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ par

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dans certains ouvrages on utilise la notation $\binom{n}{k} = C_n^k$. En anglais $\binom{n}{k}$ se lit "n choose k" par référence à son interprétation combinatoire: $\binom{n}{k}$ représente le nombre de combinaisons de k objets choisis parmi n .

La symétrie $a \leftrightarrow b$ de la relation de définition impose la relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, facile à vérifier.

Si l'on multiplie la relation de définition par $(a + b)$ on obtient l'identité qui permet la construction du triangle de Pascal:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \implies \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Suite arithmétique et sa somme :

Cette suite u_n , $n \in \mathbb{N}$ est définie par

$$u_{n+1} = u_n + a, \quad a \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad u_n = u_0 + na$$

Sa somme est

$$\sum_{n=1}^N u_n = N u_0 + \frac{N(N+1)}{2} a, \quad \iff \quad \sum_{n=1}^N n = 1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

Suite géométrique et sa somme

Cette suite u_n , $n \in \mathbb{N}$ est définie par

$$u_{n+1} = a u_n, \quad a \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad u_n = a^n u_0$$

Sa somme est

$$\sum_{n=0}^N u_n = u_0(1 + a + a^2 + \dots + a^N) = u_0 \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1,$$

et pour $a = 1$ cette somme vaut $N u_0$.

1.2 Brefs rappels sur les nombres complexes

Un nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est défini par les deux réels $x = \Re z \in \mathbb{R}$ et $y = \Im z \in \mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$. Son opposé est défini par $-z = (-x) + (-y)i = -x - iy$. On a $\mathbb{R} = \{z \mid y = 0\}$ ainsi que $i\mathbb{R} = \{z/i \mid x = 0\}$.

Egalité:

On dit que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi (si et seulement si) on a $x = x'$ et $y = y'$.

Opérations:

1. addition: $z + z' = (x + x') + (y + y')i$, avec les propriétés:

- loi interne: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' \in \mathbb{C}$
- associative: $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$
- élément neutre: $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$
- élément opposé: $\forall z \in \mathbb{C} \exists -z = -x - iy \in \mathbb{C}$

Cette loi est commutative: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$

2. produit: $zz' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$. Cette loi est interne et associative, elle admet $1 = 1 + 0i$ comme élément neutre et elle est commutative. Comme sur \mathbb{R} l'élément inverse n'existe que pour $z \neq 0$.

3. distributivité du produit par rapport à la somme: $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''$

A noter que, contrairement à \mathbb{R} , il n'y a pas de relation d'ordre sur \mathbb{C} .

Complexe conjugué:

Le complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$ est $\bar{z} = x - iy$. La conjugaison complexe a pour propriétés

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{si } z \neq 0$$

On peut alors exprimer

$$x = \Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Module:

Le module d'un nombre complexe $|z|$ est défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est une norme sur \mathbb{C} , avec les propriétés:

- positive $|z| \geq 0$ et définie $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|zz'| = |z||z'|$
- inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Interprétation géométrique dans \mathbb{R}^2

Soit $M \in \mathbb{R}^2$ un point de coordonnées cartésiennes (x, y) . Le point M est l'image du nombre complexe $z = x + iy$ et z est l'axe du point M .

Si O est l'origine de \mathbb{R}^2 , le module $|z|$ représente la longueur $OM = r$. On note $\theta \in [0, 2\pi]$ l'angle orienté (\vec{Ox}, \vec{OM}) . On peut alors écrire

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

On en tire ensuite

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r e^{-i\theta} \Rightarrow |z| = r$$

et les importantes relations d'Euler

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Pour $\theta = \pi$ il vient $e^{i\pi} = -1$ relation qu'Euler admirait beaucoup car elle mélange 3 constantes fondamentales des mathématiques i , π et e dans une seule relation.

1.3 Fonctions circulaires

On suppose connue la définition de

$$x \rightarrow \sin x, \quad x \rightarrow \cos x, \quad x \rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

cette dernière n'étant pas définie pour $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Périodicité :

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x, \quad \tan(x + n\pi) = \tan x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Parité :

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = \tan x$$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Relation fondamentale :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cette relation donne rapidement les valeurs remarquables du cosinus à partir de celles du sinus.

Relation d'addition :

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

On passe de l'une à l'autre en dérivant par rapport à x , en gardant y fixe. En divisant ces relations terme à terme on obtient

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

A partir de ces relations et en utilisant les valeurs remarquables on a:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

Expression par tangentes :

On a les relations:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{u^2}{1 + u^2} & \cos^2 x &= \frac{1}{1 + u^2} & u &= \tan x \\ \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} & \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} & t &= \tan\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

très utiles pour le calcul de certaines primitives.

Duplication :

Elles découlent des formules d'addition:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Relations d'Euler et linéarisation :

Elles expriment le lien entre les fonctions circulaires et les exponentielles d'une variable complexe:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \iff \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

En calculant les puissances successives de ces égalités, calculées avec la formule du binôme de Newton, on obtient les relations de linéarisation

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) & \sin^3 x &= \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin(3x)) & \sin^4 x &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)) \quad \dots \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) & \cos^3 x &= \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos(3x)) & \cos^4 x &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)) \quad \dots \end{aligned}$$

qui permettent de primitiver toute puissance des sinus et cosinus.

1.4 Fonctions exponentielle et logarithme

Pour $x > 0$ on définit le logarithme népérien par

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

c'est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$.

L'exponentielle $x \rightarrow f(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ est définie comme la solution de $f' = f$ avec $f(0) = e^0 = 1$.
On définit aussi

$$x \rightarrow f(x) = a^x \quad a > 0 \quad \text{par} \quad a^x = e^{x \ln a}$$

Relations algébriques :

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln x + \ln y & \ln \frac{1}{x} &= -\ln x & \ln(x^y) &= y \ln x & x > 0, y > 0 \\ e^{x+y} &= e^x e^y & e^{-x} &= \frac{1}{e^x} & (e^x)^y &= e^{xy} & x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Réciprocité :

Les fonctions $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow e^x$ sont réciproques. Cela signifie que

$$y \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \quad y = \ln x \iff x = e^y$$

ou, de façon équivalente

$$e^{\ln x} = x \quad x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(e^x) = x \quad x \in \mathbb{R}$$

Quelques limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} &= 0 & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x &= 0 \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^n &= +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1.5 Dérivation

On a la définition

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On en tire, par exemple, les limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Il est impératif de connaître les propriétés de base:

$$(f+g)' = f' + g' \quad (fg)' = fg' + f'g \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

et la table suivante de dérivées:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pour les fonctions composées on a la très importante formule

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g' \quad \text{explicitement} \quad f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

qui a de multiples applications:

$$g(x)^n \rightarrow ng(x)^{n-1}g'(x) \quad e^{g(x)} \rightarrow e^{g(x)}g'(x) \quad \ln g(x) \rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{etc...}$$

1.6 Primitives

Soit F une primitive de f ; par définition on a $F' = f$. Il est impératif de connaître la table suivante (ne pas oublier d'ajouter une constante arbitraire):

$$\begin{aligned}
 x^n &\rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \in \mathbb{N} & \frac{1}{x^n} &\rightarrow -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} & x^\lambda &\rightarrow \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\
 \frac{1}{x} &\rightarrow \ln|x| & e^x &\rightarrow e^x & a^x &\rightarrow \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1 \\
 \sin x &\rightarrow -\cos x & \cos x &\rightarrow \sin x & \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x &\rightarrow \tan x & \frac{1}{\sin^2 x} &\rightarrow -\frac{1}{\tan x} \\
 \tan x &\rightarrow -\ln|\cos x| & \frac{1}{\tan x} &\rightarrow \ln|\sin x| & \frac{1}{\sin x} &\rightarrow \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|
 \end{aligned}$$

En cas de doute sur une primitive F de f bien vérifier que $F' = f$.

1.7 Fonctions circulaires et hyperboliques

On a une première définition:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \qquad e^{\pm x} = \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x$$

On observe que \cos et ch sont paires, alors que \sin et sh sont impaires d'où découlent les relations

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On a une première différence

2π - PERIODIQUES

NON-PERIODIQUES

Définition des tangentes

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Relation fondamentale:

$$e^{ix} e^{-ix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad e^x e^{-x} = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Relations d'addition

$$\begin{aligned}
 \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\
 \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y
 \end{aligned}$$

Duplication

$$\begin{aligned}
 \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \operatorname{sh}(2x) &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
 \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \operatorname{ch}(2x) &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\
 &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x & &= 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x
 \end{aligned}$$

Expression par tangentes

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x} \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

Expression par tangentes de l'angle moitié

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \operatorname{sh} x = \frac{2v}{1-v^2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+v^2}{1-v^2} \quad v = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Dérivées

$$\begin{array}{ll} (\sin x)' = \cos x & (\cos x)' = -\sin x \\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \\ & (\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \end{array}$$

Paramétrisations du cercle et d'une branche d'hyperbole ($a > 0$)

$$\begin{array}{ll} \text{cercle} & \text{hyperbole} \\ y^2 + x^2 = a^2 & y^2 - x^2 = a^2, \quad y \geq a \\ x = a \sin \theta \quad y = a \cos \theta \quad \theta \in [0, 2\pi] & x = a \operatorname{sh} t \quad y = a \operatorname{ch} t \quad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES RÉELS

2.1 Rappels sur les notations

On notera \mathbb{N} les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$

On notera \mathbb{Z} les entiers relatifs $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

On notera \mathbb{Q} les rationnels de la forme p/q avec $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre-eux.

L'ensemble des réels (resp. des complexes) est noté \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). La notation \mathbb{K} couvre les deux possibilités: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on a les inclusions: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Rappelons enfin que $\mathbb{R}_{\pm} = \{x \in \mathbb{R} \mid \pm x \geq 0\}$, que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que $\mathbb{R}_{\pm}^* = \mathbb{R}_{\pm} \setminus \{0\}$.

2.2 Quantificateurs

Ce sont des symboles qui permettent de donner une formulation précise et concise à nombre de définitions et de théorèmes mathématiques. Il y a deux symboles possibles: le premier est \forall qui se lit "quel que soit" ou "pour tout" et le deuxième est \exists qui se lit "il existe au moins un" (le symbole $\exists!$ se lit "il existe un et un seul"). Examinons quelques exemples simples qui illustrent leur utilisation:

1. Tout élément x de l'ensemble A est supérieur ou égal à 2 s'écrit:

$$\forall x \in A \quad x \geq 2.$$

2. La négation de l'assertion précédente, il existe un élément x de A qui est strictement inférieur à 2, s'écrit:

$$\exists x \in A \quad x < 2.$$

3. Pour dire que la fonction f est positive ou nulle sur le segment $]a, b[$ on écrit:

$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \geq 0.$$

4. La négation de la relation précédente, il existe un x dans l'intervalle pour lequel f est strictement négative, s'écrit:

$$\exists x \in]a, b[\quad f(x) < 0.$$

On voit que la négation échange les deux quantificateurs \exists et \forall .

2.3 Intervalles

Définition 1 Soit A une partie (non-vide!) de \mathbb{R} . On dit que A est:

1. Majorée si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M$ (M est un majorant de A)
2. Minorée si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \geq m$ (m est un minorant de A)
3. Bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples: Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie finie de \mathbb{R} . Alors tout réel supérieur à $\max(a_1, \dots, a_n)$ est un majorant de A , alors que tout réel inférieur à $\min(a_1, \dots, a_n)$ est un minorant de A . L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est minoré mais n'est pas majoré et les entiers relatifs ne sont ni minorés ni majorés.

Définition 2 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} :

1. Si A est majorée on appelle **borne supérieure** de A le plus petit, s'il existe, des majorants M de A . On le note $\sup A$.
2. Si A est minorée on appelle **borne inférieure** de A le plus grand, s'il existe, des minorants m de A . On le note $\inf A$.

Théorème 1 Soit A une partie non vide de \mathbb{R} :

1. S'il existe un majorant a de A appartenant à A , alors $a = \sup A$.
2. S'il existe un minorant a de A appartenant à A , alors $a = \inf A$.

On admettra que toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).

Exemples:

- Une partie de \mathbb{R} peut avoir une borne supérieure sans avoir de plus grand élément. Soit l'intervalle $I = [0, 1[$; on a bien $\inf I = 0 \in A$ mais $\sup I = 1 \notin A$.
- Soit A l'ensemble des réels de la forme $1/n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On voit que $\sup A = 1 \in A$, alors que $\inf A = 0 \notin A$.

L'hypothèse d'existence des bornes supérieures et inférieures donne:

Théorème 2 L'ensemble des réels vérifie la **propriété d'Archimède**, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad ny > x$$

Dont une conséquence intéressante est:

Théorème 3 Entre deux nombres réels distincts il y a une infinité de nombres rationnels et irrationnels.

Ce résultat exprime la "densité" de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} : tout réel peut-être approché par une suite de rationnels.

Définition 3 (Convexité) Une partie de \mathbb{R} est un intervalle si

$$\forall x \in I \quad x = (1-t)a + tb \quad 0 \leq t \leq 1$$

Selon que les valeurs $t = 0$ ou $t = 1$ sont exclues, on engendre ainsi 4 types d'intervalles:

$$]a, b[\quad (t \neq 0, 1), \quad]a, b] \quad (t \neq 0), \quad [a, b[\quad (t \neq 1), \quad [a, b],$$

de plus a et (ou) b peuvent être infinis.

Définition 4 (Connexité) Une partie de \mathbb{R} est un intervalle si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (x < z < y \Rightarrow z \in I)$$

On montre que pour tout intervalle borné de \mathbb{R} ces deux définitions sont équivalentes.

Exemples:

- Les ensembles \emptyset , \mathbb{R} et le singleton $\{a\} = [a, a]$ sont des intervalles.
- Attention! L'union de 2 intervalles n'est pas nécessairement un intervalle. Par exemple $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle car $0 \notin \mathbb{R}^*$.

2.4 Ouverts, fermés

Définition 5 Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit que $a \in \mathbb{R}$ est intérieur à A si:

$$\exists r > 0 \quad : \quad]a - r, a + r[\subset A.$$

L'ensemble de tous les points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A et se note $\overset{\circ}{A}$.

Exemples: L'intérieur de tout segment borné de la forme $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ est l'intervalle $]a, b[$.

Définition 6 On dit que A est un intervalle **ouvert** si $\overset{\circ}{A} = A$.

Théorème 4 1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exemples:

- Par convention les ensembles \mathbb{R} et l'ensemble vide \emptyset sont des intervalles ouverts.
- Tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$ est un intervalle ouvert; noter que a ou b peuvent être infinis.
- Attention si l'intersection est infinie! Un contre-exemple est $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$.

On définit ensuite les fermés:

Définition 7 On dit que A est un **fermé** si son complémentaire A^c dans \mathbb{R} est ouvert.

Théorème 5 1. Toute intersection de fermés est un fermé.

2. Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Exemples:

- Les relations $\emptyset^c = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^c = \emptyset$ montrent que les ensembles \emptyset et \mathbb{R} sont aussi des fermés; ce sont les seules parties de \mathbb{R} qui soient ouvertes et fermées.
- Tout intervalle de la forme $[a, b]$ est un fermé puisque $[a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$. Donc le singleton est fermé.
- Par contre \mathbb{R}_+ est fermé car $\mathbb{R}_+^c =]-\infty, 0[$ est ouvert. De même \mathbb{Z} est fermé car $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$ est ouvert.
- Attention si l'union est infinie. Un contre-exemple est $\bigcup_{n=2}^{+\infty} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]0, 1[$.
- Il existe des parties de \mathbb{R} qui ne sont ni ouvertes ni fermées : les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$.
- Les intervalles de \mathbb{R} qui sont à la fois fermés et bornés jouent un rôle important dans la suite: on parle d'intervalles *compacts*.

2.5 Partie entière d'un réel

Définition 8 Pour tout réel x , l'entier relatif p , défini par les inégalités

$$p \leq x < p + 1,$$

est appelé partie entière de x . On le note $p = E(x)$.

L'existence et l'unicité de $E(x)$ découlent de la propriété d'Archimède. A noter les deux encadrements équivalents

$$\left(E(x) \leq x < E(x) + 1 \iff x - 1 < E(x) \leq x \right) \Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [p, p + 1[.$$

De façon plus explicite:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \left(x \in [p, p + 1[\iff E(x) = p \right) \Rightarrow E(p) = p.$$

On a les propriétés:

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad E(x + p) = E(x) + p$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad E(x + y) = E(x) + E(y) + \epsilon \quad E(x - y) = E(x) - E(y) - \epsilon \quad \epsilon = \{0, 1\}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x) \quad \sum_{l=0}^{n-1} E\left(x + \frac{l}{n}\right) = E(nx).$

2.6 Valeur absolue, norme

Définition 9 La valeur absolue est une application de $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| \in \mathbb{R}_+$ définie par

$$|x| = \max(-x, x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Elle possède les propriétés suivantes, qui définissent une norme sur \mathbb{R} :

1. Elle est positive: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$ et définie: $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. Elle vérifie: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |y \cdot x| = |y| \cdot |x|$,
3. Inégalité triangulaire $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow |x + y| \geq \left| |x| - |y| \right|$.

A partir de la valeur absolue on peut parler de *distance* entre deux réels, définie par

$$d(x, y) = |x - y| = \max(x, y) - \min(x, y),$$

avec les propriétés:

1. $d(x, y) \geq 0$, et $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

3 FONCTIONS, LIMITE, CONTINUITÉ

Dans tout ce qui suit on aura $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On va définir les fonctions d'une variable *réelle* à valeurs dans \mathbb{K} .

Définition 10 Soit D_f un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} . Une fonction (ou une application) est définie par l'ensemble de départ (ou ensemble de définition) D_f et d'une correspondance $x \rightarrow f(x) \in \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in D_f \subseteq \mathbb{R} \quad \exists! f(x) \in \mathbb{K}.$$

Le point crucial est l'existence et l'unicité de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$, ce qui caractérise une *fonction* (ou *application*) de $D_f \rightarrow \mathbb{K}$.

Deux ensembles jouent un rôle crucial dans la description d'une fonction:

1. L'ensemble de définition D_f , librement choisi. En pratique on prend souvent pour D_f l'ensemble de définition *maximal*, mais ce n'est pas une obligation.

2. La correspondance $x \rightarrow f(x)$ envoie l'ensemble D_f sur un ensemble image $\text{Im}f \subseteq \mathbb{K}$ que l'on note $\text{Im}f \equiv \{f(x) \mid x \in D_f\}$. Cet ensemble peut aussi se noter symboliquement: $\text{Im}f = f(D_f)$.

On dit qu'une fonction (f, D_f) est à valeurs réelles si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et à valeurs complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit que les fonctions (f, D_f) et (g, D_g) sont égales si

$$D_f = D_g \quad \text{et} \quad \forall x \in D_f = D_g \quad f(x) = g(x).$$

Exemples:

1. La fonction identité sur un intervalle D , notée Id_D est définie par

$$\forall x \in D \quad Id_D(x) = x.$$

2. Les fonctions polynomiales $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions à valeurs réelles si les $a_i \in \mathbb{R}$ et à valeurs complexes si les $a_i \in \mathbb{C}$. Le domaine de définition maximal $D_P = \mathbb{R}$.

3. Les fonctions trigonométriques \sin, \cos ont $D = \mathbb{R}$ et $\text{Im} = [-1, +1]$.

4. La fonction exponentielle a $D = \mathbb{R}$ et $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque, la fonction logarithme a $D = \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Im} = \mathbb{R}$.

5. La correspondance $x \rightarrow f(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0, \\ -1 & x \leq 0, \end{cases}$ ne définit pas une *fonction*, par contre

$$x \rightarrow \text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0, \end{cases} \quad D = \mathbb{R}^* \quad \text{Im} = \{-1, 1\}$$

est la fonction signe de x .

6. Donnons quelques exemples de fonctions à valeurs complexes

$$\frac{1}{x+ia} = \frac{x}{x^2+a^2} - i \frac{a}{x^2+a^2}, \quad a \neq 0, \quad D = \mathbb{R}, \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad D = \mathbb{R}.$$

7. La détermination de $\text{Im}f$ nécessite l'étude des variations de f . Par exemple, avec $x \rightarrow f(x) = xe^{-x}$ et $D_f = [0, +\infty[$ on obtient $\text{Im}f = [0, 1/e]$.

3.1 Quelques rappels sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions, on peut définir:

$$f + g: \quad x \rightarrow f(x) + g(x), \quad \lambda f: \quad x \rightarrow \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K},$$

$$f \cdot g: \quad x \rightarrow f(x) \cdot g(x), \quad f \circ g: \quad x \rightarrow f(g(x)).$$

Parité : Si f est définie sur un intervalle symétrique par rapport à $x = 0$, on dit que f est paire si $f(-x) = f(x)$, impaire si $f(-x) = -f(x)$. Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires, penser à l'exponentielle. Cependant, toute fonction $f(x)$ définie sur un intervalle symétrique par rapport à $x = 0$ peut se décomposer de façon unique en $f = f_p + f_i$ où $f_p: x \rightarrow f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ est paire et $f_i: x \rightarrow f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ est impaire.

Période : On dit que f est T -périodique (avec $T \neq 0$) si, pour tout x , on a $f(x+T) = f(x)$. Si T est une période alors nT avec $n \in \mathbb{Z}^*$ est encore une période. En pratique la période d'une fonction est la période *positive minimale*.

Sens de variation :

- On dit que f est croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $]a, b[$ si, pour tout couple (x, y) dans $]a, b[$, $x < y$ entraîne $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

- On dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur l'intervalle $]a, b[$ si, pour tout couple (x, y) dans $]a, b[$, $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

Monotonie : On dit que f est monotone sur $]a, b[$ si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle (attention! il existe bien des fonctions qui ne sont ni croissantes ni décroissantes!)

Fonctions définies par morceaux : On dit que f est une fonction définie par 2 morceaux si on a

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1, \\ f_2(x) & x \in D_2. \end{cases}$$

Alors on a $D_f = D_1 \cup D_2$ et $\text{Im } f = \text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2$.

Dans cette définition on a supposé que f était définie par deux morceaux, mais on peut considérer un nombre fini voire dénombrable de morceaux.

Exemples:

1. La fonction sin est impaire et de période 2π . La fonction cos est paire et de même période.
2. Les fonctions exponentielle et logarithme sont strictement croissantes.
3. La fonction signe est une fonction impaire définie par deux morceaux sur \mathbb{R}^* .
4. La fonction $x \rightarrow f(x) = \tan x$ définie sur le domaine $D_f =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ comprend un seul morceau.
5. La fonction $x \rightarrow g(x) = \tan x$ définie sur $D_g = \cup_{p \in \mathbb{Z}} (2p-1)\frac{\pi}{2}, (2p+1)\frac{\pi}{2}[$ est *différente* de f car $D_g \neq D_f$. Elle donne un exemple de fonction impaire, définie par un ensemble dénombrable de morceaux et de période π .

3.2 Limite

Dorénavant on ne considèrera que des fonctions définies sur un *intervalle ouvert* $D_f =]a, b[$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{K} .

Définition 11 Soit $x_0 \in]a, b[$. On dira que f a une limite l quand $x \rightarrow x_0$ si l'on a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[\quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

Remarques:

1. Attention! Le symbole $|f(x) - l|$ est une valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et un module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. Il faut donc montrer l'existence d'un δ (qui dépend de ϵ et x_0) et de l tels que $x \in]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta[$ entraîne que $f(x) \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

Il est utile de formuler la notion de limite en utilisant les suites:

Définition 12 (Définition séquentielle) Soit $x_0 \in D_f$; la fonction f a une limite l pour $x \rightarrow x_0$ si, pour toute suite réelle $(u_n) \in D_f$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = l$.

Ces deux définitions sont équivalentes. On a le très important résultat:

Proposition 1 Si f a une limite en x_0 alors cette limite est unique.

Définition 13 (Généralisation) Comme toujours soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que la fonction f a pour limite à gauche l_- si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_- \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[\quad (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l_-| < \epsilon).$$

Elle aura pour limite à droite l_+ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_+ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]a, b[\quad (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l_+| < \epsilon).$$

Si l_+ et l_- existent et que $l_+ = l_- = l$ alors la limite existe et vaut l .

Exemples:

- Soit la fonction $x \rightarrow f(x) = \text{saut}_0(x)$ qui vaut 0 pour $x \neq 0$ et 1 pour $x = 0$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ donc la limite pour $x \rightarrow 0$ existe et vaut 0.
- Soit la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \sin(1/x)$ avec $D_f = \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle n'a pas de limite à droite en $x = 0$. Pour cela on considère la famille de suites $u_n(\theta) = \frac{1}{2n\pi + \theta}$, $\theta \in [0, \pi/2]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ qui tendent toutes vers 0+ pour $n \rightarrow \infty$. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta.$$

Selon la valeur de θ choisie la limite peut prendre toute valeur entre 0 et 1, au lieu d'être unique, donc la limite à droite en 0 de f n'existe pas.

- La fonction signe $x \rightarrow f(x) = \text{sgn}(x) = x/|x|$ définie sur \mathbb{R}^* admet en $x = 0$ la limite à gauche $f(0-) = -1$ et la limite à droite $f(0+) = +1$. Comme ces 2 valeurs ne coïncident pas, f n'a pas de limite en $x = 0$.
- La fonction partie entière $E(x)$ admet une limite à droite $\forall n \in \mathbb{Z}$ avec pour limite $E(n+) = n$ mais sa limite à gauche est $E(n-) = n - 1$, donc $E(x)$ n'a pas de limite $\forall x \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi avoir des limites à gauche, à droite et infinies, selon les définitions

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in]a, b[\quad (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > A)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0 \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty, X[\quad f(x) < -A,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A > 0 \quad \exists X \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty, X[\quad f(x) > A, \text{ etc...}$$

On peut alors définir la *continuité* par

Définition 14 On dit que f est continue en $x_0 \in]a, b[$ si f a une limite l en x_0 et que $l = f(x_0)$. L'écriture symbolique est la suivante

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

On a aussi:

Définition 15 (Définition séquentielle) La fonction f est continue en $x = x_0 \in D_f$ si, pour toute suite $u_n \in D_f$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(x_0)$.

On étend ensuite la notion de continuité en un point à celle de la continuité sur un intervalle.

Définition 16 Une fonction f est continue:

1. Sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ si elle est continue en tout point de I ce qui se formalise selon

$$\forall x_0 \in I \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

2. Sur l'intervalle $I = [a, b[$ si elle est continue dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si elle est continue à droite en $x = a$ soit si $f(a+) = f(a)$.

3. Sur l'intervalle $I =]a, b]$ si elle est continue dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si elle est continue à gauche en $x = b$ soit si $f(b-) = f(b)$.

4. Sur l'intervalle compact $[a, b]$ si elle est continue dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, si elle est continue à droite en $x = a$ et si elle est continue à gauche en $x = b$.

On donne habituellement de la continuité l'interprétation intuitive suivante: le graphe de f n'a pas de "sauts", ou encore on peut tracer le graphe sans lever le crayon.

Exemples:

1. La fonction $x \rightarrow f(x) = \text{saut}_0(x)$ a pour limite 0 si $x \rightarrow 0$. Elle n'est pas continue en 0 car $f(0) = 1$.

2. La fonction signe $x \rightarrow f(x) = \text{sgn}(x) = x/|x|$ n'ayant pas de limite si $x \rightarrow 0$, elle ne sera pas continue en $x = 0$ et ceci quelle que soit la valeur choisie pour $f(0)$.

3. La fonction partie entière $E(x)$ est continue pour $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. Soit $f = \text{sgn}$ la fonction signe: elle n'est pas continue en $x = 0$. Elle est continue dans \mathbb{R}^* .

5. Attention! Il existe des fonctions définies sur \mathbb{R} qui *ne sont continues nulle part*. On ne peut pas toujours "faire un dessin".

Théorème 6 Les fonctions $x \rightarrow x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont continues $\forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve: Considérons l'ouvert $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$, pour lequel $|x| < |x_0| + 1$. Le choix de cet intervalle implique que $\delta \leq 1$. Pour prouver la continuité en x_0 il faut montrer, pour tout $\epsilon > 0$, l'existence d'un δ approprié. Pour $n = 1$ il suffit de prendre $\delta = \min(1, \epsilon)$. Pour $n \geq 2$, on a en utilisant l'inégalité

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \Rightarrow |x^n - x_0^n| < |x - x_0| n(|x_0| + 1)^{n-1}.$$

Pour $\epsilon > 0$ donné, si on prend $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{n(|x_0| + 1)^{n-1}}\right)$, alors $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^n - x_0^n| < \epsilon$.

Une fois que ce type de raisonnement est bien compris, il est fastidieux, pour établir une continuité, de recourir systématiquement à la définition " $\epsilon - \delta$ ". On évite cela en utilisant les résultats suivants:

Proposition 2 Si f et g sont continues en x_0 , alors la somme $f + g$ et le produit fg sont continues en x_0 . Si de plus f ne s'annule pas en x_0 , alors $1/f$ est continue en x_0 .

Proposition 3 Soit f continue en x_0 . Si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 . En particulier si f est continue en x_0 , alors $|f|$ est aussi continue en x_0 .

Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas des intervalles.

Ce sont ces théorèmes qu'on utilise en général pour montrer la continuité d'une fonction, en sachant que, sur leur domaine de définition, les polynômes et les fonctions classiques (exponentielle réelle et complexe, logarithme, fonctions trigonométriques et hyperboliques) sont continues.

Exemples:

• Soit $x \rightarrow f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{g(x)}{x}$ définie et continue sur $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Par définition de la dérivée on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 1$.

Soit alors la suite $u_n = t/n$ avec $n \geq 1$ pour $t \geq 0$ et $n \geq |E(t)| + 1$ pour $t < 0$. Alors $u_n \in D_f$. La continuité (définition séquentielle) de f nous permet d'affirmer que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t/n) = 1$, soit

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) = t$. L'exponentielle étant continue sur \mathbb{R} on conclut à

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t,$$

une relation d'une très grande importance.

- Les inégalités

$$0 < |\sin x| < |x| \quad \text{si} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

permettent de montrer que \sin est continue en $x = 0$, puis l'identité trigonométrique $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$ montre que \cos est aussi continue en $x = 0$. Si on utilise ensuite les relations

$$\sin x = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0) \quad \text{et} \quad \cos x = \cos x_0 \cos(x - x_0) - \sin x_0 \sin(x - x_0)$$

on peut alors conclure que les fonctions \sin et \cos sont continues sur \mathbb{R} .

3.3 Prolongement par continuité

Soit une fonction f définie et continue sur $D_f =]a, b[\setminus \{x_0\}$. Il se peut que la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ existe.

Alors on peut définir le prolongement par continuité \tilde{f} de f avec $D_{\tilde{f}} =]a, b[$ via le théorème:

Théorème 7 Soit $x_0 \in]a, b[$. Si $f :]a, b[\setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, on peut prolonger f en une fonction continue sur $]a, b[$ à la seule condition que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ existe. Le prolongement $(\tilde{f}, D_{\tilde{f}} =]a, b[)$ est alors unique avec

$$\tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in]a, b[\setminus \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x_0) = l.$$

Exemples:

- La fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $D_f =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ se prolonge par continuité à l'intervalle $] -1, +\infty[$ en prenant $\tilde{f}(0) = 1$.

- La fonction $f(x) = e^{-1/x}$ est définie sur $]0, +\infty[$. On peut la prolonger par continuité en prenant $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $\tilde{f}(0) = 0$. Alors $\tilde{f}(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

3.4 LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Les propriétés essentielles des fonctions continues à valeurs réelles sont les suivantes:

Théorème 8 Soit f continue sur l'intervalle compact A . Alors $f(A)$ est un intervalle compact.

Soit $A = [a, b]$ avec $a < b$ et borné. On aura

$$f([a, b]) = [\alpha, \beta] \quad \text{avec} \quad \alpha = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad \beta = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Théorème 9 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue de $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs dans \mathbb{R} . Soit m un nombre réel, tel que $f(a) < m < f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Attention! Ce théorème garantit l'existence pas l'unicité de m . Il reste vrai si l'on a $f(a) > m > f(b)$, et pour $m = 0$, il permet de séparer les racines d'équations algébriques ou transcendentes.

Exemples:

1. Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.
2. L'équation $e^{-x} = x$ a une et une seule racine réelle positive $x_0 \in]0, 1[$. On considère $f(x) = x - e^{-x}$. Cette fonction est monotone croissante avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 - 1/e > 0$, d'où le résultat.
3. Si f n'est pas à valeurs réelles rien ne va plus. Par exemple soit la fonction $x \rightarrow f(x) = e^{ix}$ continue pour $x \in [0, \pi]$. On a bien $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$ mais il n'existe aucun $c \in [0, \pi]$ pour lequel $f(c) = 0$.

ATTENTION! Ces théorèmes peuvent avoir l'air presque "évidents"; ils sont en fait difficiles à prouver (et d'autant plus difficiles qu'ils ont l'air évidents); Ce n'est qu'au 19ème siècle que l'on est arrivé à des énoncés et des preuves corrects.

Par ailleurs, il convient d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que ces théorèmes sont fondamentaux, et utilisés de manière extrêmement fréquente. Il faut donc les savoir par cœur, en veillant à la précision de leur énoncé.

3.5 Injection, surjection, bijection, fonction réciproque

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F ; rappelons quelques définitions.

Définition 17 On dit que f est:

1. Une injection de E dans F si tout $y \in F$ a au plus un antécédent $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On peut aussi le dire de deux autres façons équivalentes:

$$(a) \quad \forall x, x' \in E \quad x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

$$(b) \quad \forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

2. Une surjection de E dans F si tout $y \in F$ a au moins un antécédent $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On exprime cette définition par l'écriture symbolique $f(E) = F$.

3. Une bijection de E dans F si c'est à la fois une injection et une surjection de $E \rightarrow F$. Dans ce cas on a

$$\forall y \in F \quad \exists ! x \in E : \quad f(x) = y.$$

L'application de ces définitions au cas d'une fonction (f, D_f) , dont on connaît l'image $\text{Im}f$, donne:

Proposition 4 1. La fonction f , comme application de D_f dans $\text{Im}f$, est surjective.

2. La fonction f , continue sur D_f , sera injective (comme application de D_f dans $\text{Im}f$) ssi elle est strictement monotone pour $x \in D_f$.

3. La fonction f sera une bijection continue de D_f dans $\text{Im}f$ ssi f est continue et strictement monotone sur D_f .

On définit la fonction réciproque:

Définition 18 Supposons que f soit une bijection (pas nécessairement continue) de D_f dans $\text{Im}f$. Sa fonction réciproque, que l'on note f^{-1} , est définie par

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_{D_f} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\text{Im}f}$$

ou, plus concrètement

$$\forall x \in D_f : \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall y \in \text{Im}f : \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

On a les relations simples

$$D_{f^{-1}} = \text{Im}f \quad \text{Im}f^{-1} = D_f.$$

En pratique, pour déterminer la fonction réciproque, on part de $y = f(x)$ pour $x \in D_f$ et $y \in \text{Im}f$. Il faut réussir à exprimer la variable x en fonction de y , ce qui donne $x = f^{-1}(y)$ puis il suffit de revenir à la variable x .

On a le très important théorème:

Théorème 10 (Théorème de la fonction réciproque) Soit f continue et strictement monotone sur l'intervalle I et $J = f(I)$. Alors:

1. Alors $f : I \rightarrow J$ est bijective.
2. L'application $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone sur J , de MÊME sens de variation que f .
3. Les graphes de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation cartésienne $y = x$.

Exemples:

- La fonction $x \rightarrow e^x$ est une bijection continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque $x \rightarrow \ln x$ est donc continue, avec $D = \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Im} = \mathbb{R}$. Ces deux fonctions sont strictement croissantes. A noter la "dissymétrie":

$$\ln(e^x) = x \quad x \in \mathbb{R} \quad e^{\ln y} = y \quad y \in \mathbb{R}_+^*$$

induite par la différence entre D et Im . Dans ce qui suit la croissance ou la décroissance (stricte) de la fonction est indiquée par les flèches.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \rightarrow f(x) = x^{2k}$ est une bijection continue de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. On note la fonction réciproque

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x} \Leftrightarrow x = y^{2k}, \quad y \in \mathbb{R}_+, \quad \nearrow, \quad D = \mathbb{R}_+, \quad \text{Im} = \mathbb{R}_+.$$

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \rightarrow f(x) = x^{2k+1}$ est une bijection continue impaire de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note la fonction réciproque (impaire)

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x} \Leftrightarrow x = y^{2k+1}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad \nearrow, \quad D = \mathbb{R}, \quad \text{Im} = \mathbb{R}.$$

A noter que $\sqrt[2k]{x}$ n'est définie que sur \mathbb{R}_+ alors que $\sqrt[2k+1]{x}$ est définie sur \mathbb{R} tout entier.

- On peut définir les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, qui sont les bijections continues:

$$x \rightarrow f(x) = \arcsin x \quad \text{impaire} \quad \nearrow \quad D = [-1, 1] \quad \text{Im} = [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

$$x \rightarrow f(x) = \arccos x \quad \text{pas de parité} \quad \searrow \quad D = [-1, 1] \quad \text{Im} = [0, \pi]$$

$$x \rightarrow f(x) = \arctan x \quad \text{impaire} \quad \nearrow \quad D = \mathbb{R} \quad \text{Im} =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

- On peut définir les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques, qui sont les bijections continues:

$$x \rightarrow f(x) = \text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{impaire} \quad \nearrow \quad D = \mathbb{R} \quad \text{Im} = \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{pas de parité} \quad \nearrow \quad D = [1, +\infty] \quad \text{Im} = \mathbb{R}_+$$

$$x \rightarrow f(x) = \text{argth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{impaire} \quad \nearrow \quad D =]-1, 1[\quad \text{Im} = \mathbb{R}.$$

- A noter qu'en général il n'est pas possible d'obtenir une forme explicite pour f^{-1} en termes de fonctions connues. C'est donc une méthode pour définir des fonctions nouvelles.

Remarques :

1. Attention à la parité! Les fonctions arcsin et arctan sont bien impaires, mais arccos n'est pas paire car ($f = \cos$, $D_f = [0, \pi]$) n'a pas de parité définie. De même pour argch car ($f = \text{ch}$, $D_f = \mathbb{R}_+$) n'a pas de parité définie.
2. L'identité $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ conduit à l'importante relation

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1)$$

4 DÉRIVATION

4.1 Dérivée: définition

Soit une fonction f , à valeurs dans \mathbb{K} , définie sur un voisinage de x_0 . On note $\Delta x = x - x_0$ la variation autour du point x_0 et $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ la variation correspondante de la fonction f .

Définition 19 On dit qu'une fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on appelle cette limite dérivée de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$.

Définition 20 On dit que f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I et on note f' la fonction dérivée $x \rightarrow f'(x)$. La dérivée de f' , si elle existe, est notée f'' , et par récurrence, on définit la dérivée nième de f , notée $f^{(n)}$.

Attention à ne pas confondre avec la puissance n ème de f , notée f^n , avec la dérivée n ème notée $f^{(n)}$. La définition suivante est souvent utile:

Définition 21 On dit que f est n fois dérivable sur un intervalle I si elle est n fois dérivable en tout point de I ; on dit que $f \in C^n(I)$ si $f, f', \dots, f^{(n)}$ sont continues sur I .

Donc $f \in C^0(I)$ signifie simplement que f est continue sur I . On peut aussi parler de la classe $C^\infty(\mathbb{R})$, avec les polynômes, l'exponentielle, le sinus, le cosinus et la gaussienne $x \rightarrow f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

4.2 Dérivée: interprétation géométrique.

Si f est à valeurs réelles et si le nombre $f'(x_0)$ existe, il est égal à la pente de la tangente à $f(x)$ au point x_0 . L'équation cartésienne de la droite tangente à $f(x)$ en x_0 s'écrit $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

4.3 Dérivée: interprétation mécanique

Soit $x(t)$ l'équation horaire d'un point matériel selon l'axe Ox . La limite $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, est notée $\dot{x}(t_0)$ et la fonction dérivée $t \rightarrow \dot{x}(t)$ est la vitesse du point, à l'instant t , selon l'axe Ox . L'accélération à l'instant t , selon ce même axe, est la dérivée seconde $\ddot{x}(t)$. La loi fondamentale de la dynamique newtonienne s'exprime selon

$$m\ddot{x}(t) = F_x,$$

où m est la masse de la particule considérée et F_x la composante, selon l'axe Ox , de la force qui s'exerce sur la particule, qui peut dépendre de x, \dot{x}, \dots . On obtient des équations différentielles que l'on ne sait résoudre analytiquement que pour des forces F_x assez simples.

4.4 Dérivée: interprétation chimique

On considère un échantillon de matériau radio-actif qui contient $N(t)$ atomes à l'instant t . La loi fondamentale qui régit l'évolution temporelle du phénomène de désintégration est la suivante: le *taux* de variation instantanée du nombre d'atomes est une constante négative, dont la valeur absolue est notée λ (elle varie selon la nature de l'atome). La variation instantanée du nombre d'atomes est la dérivée $\dot{N}(t)$ et le *taux* de variation est \dot{N}/N . On a donc pour loi de variation temporelle

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{N}(t) = -\lambda N(t).$$

On obtient encore une équation différentielle; le lecteur peut vérifier que si N_0 est le nombre d'atomes initial à $t = 0$, au temps t il n'en restera plus que $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

4.5 Continuité et Dérivabilité

On a le théorème:

Théorème 11 Toute fonction f dérivable en x_0 est continue en ce point.

Attention! La réciproque est fautive. Par exemple la fonction $x \rightarrow |x|$ est continue en $x = 0$, mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$. Ici encore, prudence: il existe des fonctions continues sur \mathbb{R} qui ne sont dérivables en aucun point! On ne peut pas toujours "faire un dessin".

4.6 Calcul des dérivées

Par rapport à la section 1.4 on peut ajouter quelques dérivées nouvelles:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x & (\operatorname{th} x)' &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & \ln(\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{th} x, & x \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, & (\ln(\operatorname{sh} x))' &= \frac{1}{\operatorname{th} x}, & x \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

Les théorèmes suivants montrent qu'on peut calculer de façon mécanique la dérivée de toute fonction construite à partir des fonctions usuelles par les procédés standard: somme, produit, quotient et composition.

Proposition 5 Soient f et g deux fonctions dérivables pour $x \in I$. Alors, les fonctions $f + g$, $f \cdot g$, et, si $g(x) \neq 0$ pour $x \in I$, f/g sont dérivables pour $x \in I$, de dérivées respectives

$$f' + g', \quad f'g + g'f, \quad \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Si les fonctions f et g sont n fois dérivables pour $x \in I$, alors la dérivée n -ième de leur produit est donnée par la formule de Leibnitz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} f^{(n-k)}.$$

Proposition 6 (Dérivation des fonctions composées, appelée Chain Rule en anglais) Soit u une fonction dérivable pour $x \in I$, et f une fonction dérivable pour $x \in u(I)$; alors, $f \circ u$ est dérivable pour $x \in I$, de dérivée $(f \circ u)' = f' \circ u \cdot u'$.

Par définition, la fonction $x \rightarrow (f \circ u)(x) = f(u(x))$ est la fonction f avec pour variable $u(x)$; donc la fonction $x \rightarrow (f' \circ u)(x) = f'(u(x))$ représente la dérivée de f par rapport à u , considérée comme la variable.

4.7 Dérivées des fonctions réciproques

On a déjà vu le théorème 10 pour la fonction réciproque. On veut maintenant obtenir une expression pour sa dérivée. Rappelons que l'on avait défini f comme une bijection continue de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J . On note f^{-1} sa bijection réciproque de $J \rightarrow I$. On a le théorème

Théorème 12 Si f est dérivable pour $x = x_0$ dans l'intérieur de I et si $f' \circ f^{-1}(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable au point x_0 , et sa dérivée est donnée en ce point par

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}.$$

Pour les fonctions trigonométriques inverses on a

$$\begin{cases} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in]-1, 1[, \\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, & & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour les fonctions hyperboliques inverses on a

$$\begin{cases} (\operatorname{argsh} x)' = (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, & x \in \mathbb{R}, \\ (\operatorname{argch} x)' = (\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, & x \in]1, +\infty[, \\ (\operatorname{argth} x)' = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2}, & x \in]-1, 1[, \end{cases}$$

Il est essentiel de mémoriser les dérivées des fonctions de base et les théorèmes énoncés ci-dessus.

4.8 Différentielle

Commençons par la définition

Définition 22 La fonction f est une différentiable en x_0 , s'il existe un nombre l_{x_0} et une fonction ϵ , telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$, qui vérifient: $f(x_0 + h) = f(x_0) + l_{x_0} \cdot h + h\epsilon(h)$.

Ce qu'il est important de noter, c'est que $l_{x_0}h$ est *linéaire* en h . Pour les fonctions d'une variable, la différentiabilité est équivalente à la dérivabilité avec l'identification $l_{x_0} = f'(x_0)$.

Définition 23 La différentielle de f au point x_0 est alors définie par $df_{x_0}(h) = l_{x_0}h = f'(x_0)h$.

Si l'on ne spécifie pas le point x_0 on écrit $df(h) = f'h$. Si l'on prend $f(x) = x$ on peut alors définir le symbole dx par $dx(h) = h$, ce qui permet d'écrire $df(h) = f'dx(h)$. Si l'on omet enfin h , on obtient la sténographie habituelle

$$df = f'dx.$$

Les relations obtenues sur les dérivées induisent alors des relations pour les différentielles:

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(f \cdot g) = f dg + g df, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}, \quad d(f \circ g) = f' \circ g dg.$$

Cette notation s'imposera dans le calcul intégral.

Dans les applications concrètes le symbole dx indique une variation "petite" mais *finie* de la variable x , très différent du symbole $\Delta x = x - x_0$ qui lui tend vers zéro dans la définition de la dérivée. Cette variation de x induit une variation df "petite" mais finie de la fonction f . Dans cette interprétation on peut écrire la dérivée première comme le rapport $f'(x) = \frac{df}{dx}$, en divisant la relation qui définit la différentielle par dx . La dérivée seconde s'écrit alors $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, etc... En particulier la règle de dérivation des fonctions composées devient "triviale" puisqu'elle s'écrit $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$ et se "démontre" en observant la simplification des facteurs dg présents au numérateur et au dénominateur. nous considérerons donc la notation différentielle comme une sténographie commode dans les applications, mais qui ne peut jouer aucun rôle dans la démonstration rigoureuse des propriétés de différentiabilité.

4.9 Dérivée première et variations

Rappelons les propriétés:

Théorème 13 1. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et de dérivée positive (resp. négative) sur $]a, b[$, alors ceci est équivalent à dire que f est croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$.

2. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et de dérivée strictement positive (resp. strictement négative) sur $]a, b[$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $]a, b[$.

3. Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$. Si f admet un extremum relatif en $x = x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.

Attention! Les réciproques de (2) et (3) sont fausses. Par exemple, si f' a un zéro, la fonction f n'a pas nécessairement un extremum relatif en ce point. Considérer l'exemple $x \rightarrow x^3$ en $x_0 = 0$. De plus cette fonction est monotone strictement croissante sur \mathbb{R} , mais sa dérivée n'est pas strictement positive.

Pour un extremum relatif en x_0 il faut que la dérivée change de signe en traversant x_0 .

4.10 Dérivée seconde et convexité

Commençons par la définition de la convexité:

Définition 24 La fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si f est continue sur $]a, b[$ et si $\forall x, y \in [a, b]$ et $\forall t \in [0, 1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si on change le sens de l'inégalité, la fonction est dite concave. Si les inégalités sont strictes, on parle de convexité ou de concavité stricte.

Cette définition implique la continuité de f , mais pas sa dérivabilité. Si on considère la fonction $x \rightarrow |x|$, elle est convexe sur \mathbb{R} , mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$.

Interprétation géométrique: si f est convexe sur l'intervalle I , son graphe a sa "concavité tournée vers le haut" (penser à la fonction $x \rightarrow x^2$). Dit autrement, toute corde joignant deux points de I passe "au-dessus" de la courbe. Si f est concave, son graphe a la "concavité tournée vers le bas" (penser à $x \rightarrow -x^2$). On a le théorème:

Théorème 14 *Si une fonction f est continue sur $[a, b]$ et une fois dérivable sur $]a, b[$, alors f est convexe (resp. strictement convexe) sur $[a, b]$ ssi f' est croissante (resp. strictement croissante) sur $]a, b[$. Si f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ alors elle est convexe (resp. strictement convexe) ssi f'' est positive (resp. strictement positive) sur $]a, b[$.*

Le cas du polynôme du second degré $x \rightarrow P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ est particulièrement simple: P est convexe si $a_2 > 0$ et concave si $a_2 < 0$. On définit:

Définition 25 *Un point d'inflexion est un point du graphe où la courbe change de convexité.*

On a le théorème

Théorème 15 *Soit f une fonction C^2 de $D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit x_0 , intérieur à D_f . Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors x_0 est un point d'inflexion.*

A noter que l'étude de la convexité, pour une fonction C^2 , au voisinage d'un extremum local, permet de savoir si c'est un minimum ou un maximum. Supposons que x_0 soit un extremum local de f . Alors on a $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) > 0$, alors $\{x_0\}$ est un minimum; si $f''(x_0) < 0$, alors $\{x_0\}$ est un maximum. Si $f''(x_0) = 0$ on ne peut rien dire.

4.11 LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

On ne considère que des fonctions réelles. Les principaux théorèmes sur les dérivées sont les suivants:

Théorème 16 (Théorème de Rolle) *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et deux réels $a < b$ tels que $[a, b] \subset D$. Si f est continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$; alors il existe un point $c \in]a, b[$ où $f'(c) = 0$.*

Attention! Ce résultat est faux pour les fonctions à valeurs complexes. Soit $f(x) = e^{ix}$ et $[a, b] = [0, 2\pi]$. Les hypothèses du théorème sont vérifiées, mais $f'(x) = ie^{ix}$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$. La dérivabilité sur $]a, b[$ est aussi importante: la fonction $x \rightarrow f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ est bien continue, avec $f(-1) = f(1)$, mais il n'existe pas de point $c \in]-1, 1[$ pour lequel f' s'annule car f' n'est pas continue en $x = 0$.

Théorème 17 (Théorème des accroissements finis) *Si f est définie sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Si l'on pose $a = x$, $b = x + h$ et $c = x + \theta h$ on peut écrire

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad \theta \in]0, 1[.$$

Noter que c est fonction de a, b alors que θ est une fonction de x, h .

Théorème 18 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable sur I , et de dérivée nulle. Alors, f est constante sur I .*

Exemple :

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On considère la fonction $x \rightarrow f(x) = x^\alpha$ pour $x \geq 1$. Le théorème des accroissements finis donne

$$(x + 1)^\alpha - x^\alpha = \frac{\alpha}{(x + \theta)^{1-\alpha}}, \quad \theta \in]0, 1[, \implies \frac{\alpha}{(n + 1)^{1-\alpha}} < (n + 1)^\alpha - n^\alpha < \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

Définissons alors la suite $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}}$. En sommant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient

$$S_n(\alpha) - 1 + \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} < \frac{1}{\alpha}(n+1)^\alpha - \frac{1}{\alpha} < S_n(\alpha),$$

d'où l'on tire l'encadrement de la série cherchée

$$\frac{1}{\alpha}(n+1)^\alpha - \frac{1}{\alpha} < S_n(\alpha) < \frac{1}{\alpha}(n+1)^\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}. \quad (2)$$

Il résulte des relations données dans (2), l'équivalence

$$S_n(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha} (n+1)^\alpha \quad \alpha \in]0, 1[, \quad n \rightarrow \infty.$$

Le même type d'argument, appliqué à la fonction $f(x) = \ln x$, donne l'équivalence

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n+1), \quad n \rightarrow \infty$$

5 FORMULE DE TAYLOR ET D.L.

5.1 Formule de Taylor

Le théorème des accroissements finis se généralise si l'on suppose f assez dérivable. Plus précisément on a

Théorème 19 *Si la fonction réelle f , définie, est dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$ sur $[a, b]$, et si $f^{(n)}$ existe sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + r_n, \quad r_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

Le terme r_n est le reste de la série de Taylor. On peut aussi écrire $c = a + \theta(b-a)$ avec $\theta \in]0, 1[$.

Lorsque $a = 0$ on retrouve la série de Taylor-Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad \theta \in]0, 1[.$$

Cette formule est fondamentale dans l'étude des développements limités.

5.2 Notations o , O et \sim

Définition 26 *On dira que*

$$\left\{ \begin{array}{lll} f(x) = o(g(x)) & \text{pour } x \rightarrow x_0 & \text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \\ f(x) = O(g(x)) & \text{pour } x \rightarrow x_0 & \text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = Cte \neq 0, \\ f(x) \sim g(x) & \text{pour } x \rightarrow x_0 & \text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \end{array} \right.$$

On peut écrire, par exemple:

$$\begin{array}{llll} \text{pour } x \rightarrow 0 : & \sin 2x = O(x) = o(1) & \cos x - 1 = O(x^2) = o(x) & x^4 = o(x^2) \\ \text{pour } x \rightarrow +\infty : & \frac{1}{x} = o(1) & \frac{x+3}{x+1} = O(1) & \frac{x+3}{x+1} \sim 1 \end{array}$$

On a vu qu'une fonction dérivable en un point donné peut être approximée par une droite dans un voisinage assez petit de ce point. On est amené à essayer de généraliser en approximant non plus par une application linéaire, mais par un polynôme de degré n . Ceci conduit à la définition suivante:

Définition 27 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0, et P un polynôme de degré n . On dit que f admet P pour développement limité d'ordre n , en abrégé: D.L. $(n, 0)$, en $x = 0$ si l'on a $f(x) = P(x) + o(x^n)$.

On a les propriétés simples:

Proposition 7 Si f et g admettent respectivement P et Q pour D.L. $(n, 0)$, alors $f + g$ admet $P + Q$ pour D.L. $(n, 0)$, et, si λ est un réel, λf admet λP pour D.L. $(n, 0)$.

Il résulte de la formule de Taylor:

Théorème 20 Si la fonction réelle f , définie dans un voisinage de $x = 0$, possède en ce point une dérivée n -ième finie, alors f admet un D.L. $(n, 0)$ donné par:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Ainsi les coefficients du D.L. sont données par les dérivées successives de f en $x = 0$. On a souvent besoin des D.L., en particulier pour lever des indéterminations dans des calculs de limites, de calculer des développements limités. Mais en pratique il devient vite très fastidieux de calculer ces coefficients en ayant recours à la formule de Taylor. On va voir, dans le paragraphe suivant, qu'il existe un algorithme pour calculer le développement limité d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée.

5.3 Pratique des D.L

Additionner deux D.L. de même ordre est facile:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + o(x^2)$$

Attention si les ordres sont différents

$$((a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + o(x^3))) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + o(x^2)$$

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué:

Proposition 8 Soit f (resp. g) une fonction qui admet P (resp. Q) pour D.L. $(n, 0)$. On obtient le D.L. $(n, 0)$ du produit fg en faisant le produit des D.L. n et en supprimant tous les termes d'ordre strictement supérieur à n .

Par exemple:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2))(b_0 + b_1x + b_2x^2 + o(x^2)) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + o(x^2)$$

On peut aussi calculer le D.L. d'une composée $g \circ f$ en 0 si l'on connaît le développement de f en 0 et si $f(0) = 0$, c'est-à-dire que le D.L. de f n'a pas de terme constant:

Proposition 9 Soit f une fonction telle que $f(0) = 0$. On suppose que f (resp. g) admet P (resp. Q) pour D.L. $(n, 0)$.

On obtient le D.L. $(n, 0)$ de $g \circ f$ en remplaçant, dans le polynôme Q , la variable X par le polynôme P et en supprimant tous les termes d'ordre strictement supérieur à n .

Par exemple: $g(x) = \cos x$ et $f(x) = \ln(1+x)$. On a bien $f(0) = 0$. On veut son D.L. $(3, 0)$. On décompose d'abord $\cos f = 1 - f^2/2 + o(f^3)$ puis on remplace f par son D.L. $(3, 0)$ dans g . Or on a $f(x) = \ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ donc

$$\cos(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1}{2}(x - x^2/2 + x^3/3)^2 + o(x^3) = 1 - x^2/2 + x^3/2 + o(x^3).$$

On peut enfin calculer le développement d'un quotient:

Proposition 10 Soit f (resp. g) une fonction qui admet P (resp. Q) pour D.L. $(n, 0)$. Si $g(0) \neq 0$, on obtient le D.L. $(n, 0)$ du quotient f/g en faisant la division suivant les puissances croissantes, et en ne retenant que les termes d'ordre inférieur ou égal à n .

Ici pas d'hésitation, on divise! L'exemple classique du DL(5, 0) de la tangente:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \sin x = x - x^3/6 + x^5/80 + o(x^5) \quad \cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)$$

On opère la division selon les puissances *croissantes* de la variable

$$\begin{array}{r|l} x - x^3/6 + x^5/80 & 1 - x^2/2 + x^4/24 \\ -x + x^3/2 - x^5/24 & \hline \hline x^3/3 - x^5/30 & x + x^3/3 + 2x^5/15 \\ -x^3/3 + x^5/6 & \\ \hline 2x^5/15 & \end{array}$$

et on conclut

$$\tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + o(x^5).$$

5.4 D. L. de la primitive

On montre facilement que, si f est une fonction continue en 0, telle que $|f|$ est majorée par $|x|^k$ sur un voisinage de 0, l'unique primitive de f qui s'annule en 0 est majorée en valeur absolue par $|x|^{k+1}/(k+1)$. On en déduit la proposition suivante, qui donne le développement limité de la primitive d'une fonction:

Proposition 11 *Soit f une fonction qui admet P pour D.L. n en 0. Alors, si F est une primitive de f , elle admet pour développement limité à l'ordre $n+1$ l'unique primitive de P qui prend la même valeur que F en 0.*

Cette proposition permet, par exemple, de trouver le développement limité de $\ln(1+x)$ à partir de celui bien connu de sa dérivée $\frac{1}{1+x}$. Même remarque pour les D.L. de $\arcsin x$ et $\arctan x$.

Remarquons par contre qu'il n'est en général pas possible de donner un développement limité de la dérivée à partir de celui de la fonction; la raison en est que le $o(x^n)$ qui apparaît comme reste du D.L. pourrait ne pas être dérivable.

5.5 D. L. décalés

Si on demande un D.L. autour de $x = x_0 \neq 0$ on posera $u = x - x_0$ et on calculera le D.L. autour de $u = 0$. Par exemple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{D.L. } (2, x_0 = 1) \quad e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + o((x-1)^2), \\ \text{D.L. } (4, x_0 = \pi/2) \quad \sin x = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} + o((x-\pi/2)^4). \end{array} \right.$$

5.6 Quelques D.L. utiles

On remarquera que toutes les méthodes de calcul vues précédemment sont parfaitement inutiles si l'on ne connaît pas les D.L. des fonctions de base.

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n), \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n). \end{cases}$$

Plus généralement:

$$\begin{cases} \frac{1}{(1+x)^p} = 1 - px + \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \dots + (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} x^n + o(x^n), & p \in \mathbb{N} \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), & \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}$$

avec les deux cas particuliers importants:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^n + o(x^n), \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^n + o(x^n). \end{cases}$$

Pour les exponentielles on a

$$\begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \dots + \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n + o(x^n), \quad a > 0, \quad a \neq 1. \end{cases}$$

On en tire les lignes hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad \xrightarrow{\text{primitive}} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Les relations $\cos x = \cosh(ix)$ et $\sin x = -i \sinh(ix)$ donnent

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad \xrightarrow{\text{primitive}} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Les D.L. des lignes trigonométriques et hyperboliques réciproques s'obtiennent par primitive de leurs dérivées, dont les D.L. sont connus:

$$\begin{cases} \arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}), \\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}). \end{cases}$$

6 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

6.1 Primitives

La notion de primitive est l'inverse de la notion de dérivée. On a la définition:

Définition 28 Soit f , à valeurs dans \mathbb{K} , une fonction C^0 sur un intervalle I . Une primitive F est définie par la relation $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Il résulte du théorème (18) que si F est une primitive sur I , toutes les autres primitives sur I seront de la forme $F + C$, où C est une constante.

Attention aux fonctions définies par morceaux! Par exemple $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est définie sur $D = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$ qui n'est pas un intervalle. Sa primitive la plus générale n'est pas $F : x \rightarrow \ln|x| + C$. Il faut alors appliquer le résultat précédent séparément sur chaque intervalle \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* et on obtient:

$$F(x) = \ln(-x) + C_1 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_-^*; \quad F(x) = \ln x + C_2 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

6.2 Table des primitives

On complète la liste donnée dans la section 1.5 par les primitives nouvelles (attention à la remarque précédente pour les constantes):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &\rightarrow \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch} x &\rightarrow \operatorname{sh} x, & \operatorname{th} x &\rightarrow \ln(\operatorname{ch} x), & x &\in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\rightarrow \arcsin x, & x &\in]-1, 1[, & \frac{1}{1+x^2} &\rightarrow \arctan x, & x &\in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} &\rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2+1}), & x &\in \mathbb{R} & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &\rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2-1}), & x &\in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

6.3 Intégrale

Définition 29 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f sur cet intervalle, que l'on note $\int_a^b f(x)dx$ est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b \equiv F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f .

Ainsi une intégrale est un *nombre* (réel ou complexe) alors qu'une primitive est une *fonction* (à valeurs réelles ou complexes).

6.4 Interprétation géométrique

Soit $a < b$ et f réelle positive. L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est alors l'aire du domaine dont les bords sont constitués par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites $y = 0$, $x = a$ et $x = b$. Si f est de signe quelconque on obtient une aire algébrique, qui peut être positive, négative ou nulle.

Exemples: L'aire du cercle de centre O et de rayon a est donnée par l'intégrale $4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Par contre $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$ car l'aire positive pour $x \in [0, \pi]$ se compense exactement avec l'aire négative pour $x \in [\pi, 2\pi]$.

6.5 PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

On a la condition suffisante d'existence de l'intégrale:

Théorème 21 L'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle compact existe.

Avec les propriétés:

- Linéarité $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$

- Inversion des bornes

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Relation de Chasles (ou additivité) $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx,$

- Positivité:

$$\text{si } a < b \text{ et si } f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in]a, b[\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

qui reste valable avec des inégalités strictes.

- Majoration du module

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6.6 Intégrale fonction de sa borne supérieure

On a l'important résultat

Théorème 22 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si l'on définit

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

alors $F(x)$ est $C^1([a, b])$ et sa dérivée est $F'(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b]$.

En fait F est la primitive de f qui vérifie $F(a) = 0$.

Exemples:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt \rightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x), \quad F(x) = \int_0^{\sin x} f(t) dt \rightarrow F'(x) = \cos x f(\sin x).$$

6.7 Pratique du calcul intégral

Avant de tenter de calculer une intégrale, il est essentiel de s'assurer qu'elle existe! Pour cela le théorème (21) sera suffisant cette année. Ensuite il faut pouvoir obtenir une primitive et pour cela on dispose de deux outils: le changement de variable et l'intégration par parties.

Théorème 23 (Changement de variable) Soit $x(t)$ une bijection $C^1([a, b])$. Pour toute fonction f à valeurs complexes, continue sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} (f \circ x)(t) x'(t) dt. \quad (3)$$

Remarques:

1. Attention! L'intégrand et élément différentiel *changent* et en général les bornes d'intégration *changent* aussi.
2. Pour des fonctions définies par morceaux on utilise l'additivité pour se ramener sur un intervalle.

3. Soit l'intégrale $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. On choisit la bijection $x(t) = a \sin t$, avec $x^{-1}(t) = \arcsin(t/a)$ qui envoie $x \in [0, a] \rightarrow t \in [0, \pi/2]$. La relation (3) donne

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} a^2$$

qui est bien égale au quart de l'aire du cercle de rayon a .

4. Pensez à la PARITE: si f est continue sur $[-a, a]$, on a

$$f \text{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad f \text{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

5. Soit f de période T . On a:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Théorème 24 (Intégration par parties) Soient f et g deux fonctions à valeurs dans \mathbb{K} , qui sont $C^1([a, b])$. On a la relation

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

Si l'on utilise la notation différentielle, cette relation s'écrit:

$$\int_a^b f dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b g df.$$

On peut évidemment itérer les intégrations par parties! Cette technique permet de primitiver le produit d'une exponentielle par un polynôme, les puissances du logarithme ou les fonctions trigonométriques (et hyperboliques) inverses, etc...

Exemples : Soit $I_n = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a bien sûr $I_1 = \arctan x$. Pour $n \geq 2$ une intégration par parties, avec $dg = dt$ et $f = 1/(1+t^2)^n$, donne

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{(2n-1)}{2n} I_n, \quad n \geq 2. \quad (4)$$

Insistons aussi sur l'intérêt qu'il y a, parfois, à éviter les intégrations par parties répétées. Par exemple la relation

$$\int e^{(a+i\omega)x} dx = \frac{e^{(a+i\omega)x}}{a+i\omega}, \quad a \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R},$$

combinée avec la formule de Moivre, donne, en séparant partie réelle et partie imaginaire, les primitives

$$\int e^{ax} \cos(\omega x) dx = e^{ax} \frac{a \cos \omega x + \omega \sin \omega x}{a^2 + \omega^2}, \quad \int e^{ax} \sin(\omega x) dx = e^{ax} \frac{a \sin \omega x - \omega \cos \omega x}{a^2 + \omega^2}$$

plus rapidement que deux intégrations par parties successives!

6.8 Quelques exemples classiques

Il faut connaître différent cas simples, où les primitives peuvent s'obtenir par des techniques connues:

1. Pour une fraction rationnelle $R(x) = P(x)/Q(x)$ avec P et Q des polynômes, on décompose en éléments simples. La partie entière et les éléments simples de première espèce $(x-a)^{-n}$ sont faciles à primitiver. Les éléments simples de deuxième espèce $(ax+b)/(x^2+px+q)^n$ avec $\delta = p^2 - 4q < 0$ se traitent en passant à la variable $t = (x-p/2)/\sqrt{-\delta}$. Ce changement de variable donne

$$\int \frac{\alpha t + \beta}{(t^2+1)^n}, \quad n \geq 2.$$

La partie impaire en t se primitive par le changement de variable $u = t^2 + 1$, et la partie paire a été primitivée dans l'exemple qui conduit à la relation (4).

2. Pour une fraction rationnelle d'exponentielle de la forme $R(e^{ax})$, avec $a \neq 0$, utiliser le changement de variable $u = e^{ax}$ qui donne

$$\int R(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{R(u)}{u} du.$$

On est ramené à primitiver une fraction rationnelle.

3. Primitives trigonométriques de la forme $\int \sin^n t \cos^p t dt$. Si $n = 2n' + 1$ et $p = 2p' + 1$ sont impairs on primitive par le changement de variable $u = \cos(2x)$. Ceci donne

$$\int \sin^{2n'+1} x \cos^{2p'+1} x dx = \int (\sin^2 x)^{n'} (\cos^2 x)^{p'} \sin x \cos x dx = - \int \left(\frac{1-u}{2}\right)^{n'} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{p'} \frac{du}{2}.$$

Si n ou p est impair on primitive par le changement de variable $u = \sin x$ ou $u = \cos x$. Il vient

$$\int \sin^p x \cos^{2q'+1} x dx = \int u^p (1-u^2)^{q'} du, \quad \int \sin^{2p'+1} x \cos^q x dx = - \int (1-u^2)^{p'} u^q du.$$

Si n et p sont pairs, on abaisse le degré en exprimant $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin x \cos x$ en fonction de $\sin(2x)$, puis on passe à $u = 2x$. Enfin si n ou p est nul, on utilise les formules de linéarisation que l'on obtient avec la formule de Moivre. Par exemple

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin(3x)), \quad \sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)), \quad \text{etc...}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos(3x)), \quad \cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)), \quad \text{etc...}$$

Tout ce qui vient d'être dit s'applique, *mutatis mutandis*, aux cas où les lignes trigonométriques sont remplacées par des lignes hyperboliques.

4. Les puissances entières positives de la tangente se primitivent par changement de variable

$$u = \tan x \quad dx = \frac{du}{1+u^2} \quad \implies \quad \int (\tan x)^n dx = \int \frac{u^n}{1+u^2} du.$$

Les puissances entières positives de la cotangente se ramènent à la tangente par $u = \pi/2 - x$.

5. Soit une fraction rationnelle $R(\sin^2 x)$. On utilise à nouveau le changement de variable $u = \tan x$ qui donne

$$\int R(\sin^2 x) dx = \int R\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2},$$

une fraction rationnelle en u .

6. Soient deux polynômes $P(X, Y)$ et $Q(X, Y)$ à deux indéterminées. On peut définir une fraction rationnelle $R(X, Y) = \frac{P(X, Y)}{Q(X, Y)}$. Soit alors à primitiver $R(\sin x, \cos x)$. On passe à la variable $u = \tan(x/2)$ et on utilise les relations

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad x = 2 \arctan u \quad \implies \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

qui donnent la fraction rationnelle

$$\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}.$$

7. Intégrales abéliennes de la forme

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0,$$

où $R(X, Y)$ est une fraction rationnelle à deux indéterminées. Par une translation sur x on ramène la racine à $\sqrt{ax^2 + c}$. Le cas $a > 0$, $c = 0$ est évident. Selon les signes de a et c , par une homothétie sur

x , on se ramène à l'une des trois formes $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{u^2-1}$, $\sqrt{u^2+1}$. Les changements de variables $u = \sin \theta$, $u = \operatorname{ch} \phi$, $u = \operatorname{sh} \psi$ donnent respectivement

$$\begin{cases} \int R(u, \sqrt{1-u^2}) du = \int R(\sin \theta, \cos \theta) \cos \theta d\theta, \\ \int R(u, \sqrt{u^2-1}) du = \int R(\operatorname{ch} \phi, \operatorname{sh} \phi) \operatorname{sh} \phi d\phi, \\ \int R(u, \sqrt{u^2+1}) du = \int R(\operatorname{sh} \psi, \operatorname{ch} \psi) \operatorname{ch} \psi d\psi. \end{cases}$$

8. Intégrales abéliennes de la forme

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad - bc \neq 0, \quad \implies$$

se calculent par le changement de variable

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad x = \frac{b - du^n}{-a + cu^n} \quad dx = \frac{ad - bc}{(a - cu^n)^2} nu^{n-1} du$$

qui donnent une fraction rationnelle

$$\int R\left(\frac{b - du^n}{-a + cu^n}, u\right) \frac{ad - bc}{(a - cu^n)^2} nu^{n-1} du.$$

6.9 Fonctions spéciales

En pratique, il existe beaucoup de primitives et d'intégrales que l'on ne sait pas exprimer analytiquement en termes des fonctions élémentaires. Pour les intégrales qui jouent un rôle théorique ou pratique important, on définit des fonctions nouvelles ou "fonctions spéciales" que l'on tabule numériquement. Parmi de très nombreux exemples on a la primitive de la gaussienne ou fonction erreur, qui joue un rôle important en théorie des probabilités

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{erf}(0) = 0, \quad \operatorname{erf}(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ou la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0,$$

qui généralise la notion de factorielle aux réels positifs, ou les fonctions de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce qui suit on va étudier les équations différentielles (en abrégé ED) *linéaires* du premier et du second ordre (pour ces dernières à coefficients constants).

7.1 Equations linéaires du premier ordre

La forme la plus générale de ces ED est la suivante:

$$(E) \quad : \quad y' = a(x)y + b(x), \quad (H) \quad : \quad y' = a(x)y,$$

où a et b sont deux fonctions $C^0(I)$, à valeurs dans \mathbb{K} .

Ces équations sont du premier ordre car seule la fonction et sa dérivée première apparaissent; elles sont linéaires en y et y' ; lorsque $b = 0$ on parle d'équation *homogène* ou sans second membre, et lorsque $b \neq 0$ on parle d'équation *inhomogène* ou avec second membre.

Définition 30 On appelle solution de l'équation (E) toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I et telle que

$$\forall x \in I \quad y' = a(x)y + b(x).$$

Remarques:

1. Le deuxième membre de (E) étant continu, toute solution sera $C^1(I)$.
2. Si l'on rencontre l'équation $a_0(x)y' + a_1(x)y = a_2(x)$, par division par $a_0(x)$ on se ramène à la forme (E). Mais ceci n'est possible que si $a_0(x)$ ne s'annule pas sur I .
3. On peut aussi chercher à résoudre une ED avec "conditions aux limites": par exemple on se donne la valeur de $y(x_0)$ pour un $x_0 \in I$.

Pour l'équation homogène on a:

Théorème 25 Si A est une primitive de a sur l'intervalle I , alors la solution générale de l'équation homogène (H) est donnée par:

$$x \rightarrow y_0(x) = Ce^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{K}.$$

Les solutions forment un espace vectoriel E de dimension 1 (une constante arbitraire C). Par exemple on peut définir la fonction $x \rightarrow e^x$ comme la solution de $y' = y$ avec la condition $y(0) = 1$.

Ceci se généralise en:

Théorème 26 La solution générale de l'équation (E) est de la forme

$$y = y_0 + y_P, \quad C \in \mathbb{K},$$

où y_0 est la solution générale de l'équation homogène (H) et $y_P(x)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre (E).

La solution particulière y_P peut s'obtenir par une méthode générale, dite méthode de la *variation de la constante*. Elle consiste à chercher la solution particulière de (E) sous la forme

$$y_P(x) = C(x)e^{A(x)}.$$

Si on injecte cette forme pour y_P dans l'équation (E) on obtient la relation $C'(x) = b(x)e^{-A(x)}$. Comme il se doit, pour $b = 0$ on retrouve la solution de l'équation (H), et pour $b \neq 0$ le calcul d'une primitive donne alors y_P .

Attention! En cas de conditions aux limites, appliquer celles-ci à la solution complète y et non pas seulement à y_P ou y_0 !

7.2 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

La forme la plus générale de ces ED est la suivante:

$$(E) \quad : \quad y'' + ay' + by = f(x), \quad (H) \quad : \quad y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Il faut exclure le cas $b = 0$ car si on pose $u = y'$ l'équation (E) se ramène à $u' + au = f$ qui est du premier ordre.

Définition 31 On appelle équation caractéristique des ED (H) et (E) l'équation algébrique $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ et de racines $r_{\pm} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

Cette définition nous permet d'énoncer:

Théorème 27 La solution générale de l'équation (H) est:

$$\Delta > 0 \quad \rightarrow \quad y_0(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 \sinh(\rho x) + C_2 \cosh(\rho x)) \quad \rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad y_0(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 x + C_2)$$

$$\Delta < 0 \quad \rightarrow \quad y_0(x) = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)) \quad \omega = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Selon le signe de Δ on bascule des fonctions trigonométriques aux fonctions hyperboliques. On peut aussi comprendre le cas $\Delta = 0$ via les limites

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sinh(\rho x)}{\rho} = x, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \cosh(\rho x) = 1.$$

Lorsque $a = 0$ noter les deux cas limites importants en pratique:

$$\begin{aligned} \omega \in \mathbb{R}_+ \quad y'' + \omega^2 y = 0 &\quad \rightarrow \quad y_0(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x), \\ \rho \in \mathbb{R}_+ \quad y'' - \rho^2 y = 0 &\quad \rightarrow \quad y_0(x) = C_1 \sinh(\rho x) + C_2 \cosh(\rho x) \end{aligned}$$

Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Il faudra donc deux conditions aux limites pour fixer une solution unique. Ceci se généralise à toute équation différentielle *linéaire* d'ordre n : les solutions forment un espace vectoriel de dimension n , exhibant n constantes d'intégration arbitraires et nécessitant en principe n conditions aux limites pour obtenir l'unicité.

Théorème 28 *La solution générale de l'équation (E) est la somme*

$$y = y_0 + y_P,$$

où y_0 est la solution générale de l'équation homogène (H) et y_P est une solution particulière de l'équation avec second membre E .

En fait ce théorème reste valable pour des ED linéaires, quel que soit leur ordre. La méthode de variation de la constante permet encore d'obtenir y_P , mais son application pratique peut être si laborieuse, que l'on procède par énumération des cas les plus souvent rencontrés dans les applications. On notera $P_n, \tilde{P}_n, Q_n, \tilde{Q}_n$ des polynômes de degré n .

Pour un second membre polynômial:

$$f(x) = P_n(x) \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = Q_n(x).$$

Pour un second membre produit d'un polynôme par une exponentielle réelle:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique.

Si α est une racine *simple* de l'équation caractéristique (résonance simple):

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

Si α est une racine *double* de l'équation caractéristique (résonance double):

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = x^2Q_n(x)e^{\alpha x},$$

Pour un second membre trigonométrique:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{P}_n(x) \cos(\omega x)) \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = e^{\alpha x}(Q_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{Q}_n(x) \cos(\omega x)).$$

si $\alpha + i\omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique.

Si $\alpha + i\omega$ est une racine (nécessairement simple) de l'équation caractéristique:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \sin(\omega x) + \tilde{P}_n(x) \cos(\omega x)) \quad \Longrightarrow \quad y_P(x) = e^{\alpha x}(xQ_n(x) \sin(\omega x) + x\tilde{Q}_n(x) \cos(\omega x)).$$

8 DÉRIVÉES PARTIELLES, DIFFÉRENTIELLE

Dans ce chapitre on va donner quelques définitions relatives aux fonctions de deux variables réelles.

8.1 Dérivées partielles et différentielle

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , et $(x, y) \in U \rightarrow f(x, y)$ une fonction définie sur U et à valeurs dans \mathbb{K} , et soit $a = (x_0, y_0) \in U$.

Définition 32 Si les nombre réels

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

existent, ils sont appelés dérivées partielles de f en $a = (x_0, y_0)$ et sont notées respectivement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Ces dérivées partielles seront définies dans U , un ouvert de \mathbb{R}^2 , si elles sont définies en tout point $X = (x, y) \in U$. Ce sont alors des fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(X), \quad X \in U.$$

Remarques:

1. Les notations pour les dérivées partielles sont nombreuses. On a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = D_x f = f'_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = D_y f = f'_y.$$

2. En pratique $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'obtient en dérivant f par rapport à la variable x , en considérant y comme une constante, alors que $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'obtient en dérivant f par rapport à la variable y , en considérant x comme une constante.
3. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, admettent à leur tour des dérivées partielles, on obtient quatre dérivées partielles secondes a priori indépendantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Dans cette liste, les deux dernières dérivées partielles sont dites "dérivées croisées". On appelle Laplacien d'une fonction f le scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Les fonctions dont le Laplacien est nul sont dites "harmoniques".

Sous certaines conditions, les dérivées croisées sont égales:

Théorème 29 (Théorème de Schwarz) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ admettant des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Si ces dérivées partielles sont continues en $a \in U$, alors elles sont égales en ce point:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

La différentielle d'une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ est donnée par

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a) dy.$$

Exemple: Selon que l'on utilise les cartésiennes ou les polaires on a les relations

$$f = xy \Rightarrow df = ydx + xdy, \quad f = r^2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow df = r \sin(2\theta) dr + r^2 \cos(2\theta) d\theta,$$

$$g = x^2 + y^2 \Rightarrow dg = 2x dx + 2y dy \quad g = r^2 \Rightarrow dg = 2r dr.$$