Faculté des Sciences de Luminy

L 2 Mage- Math- PC- Physique

Algèbre et Analyse 1 Première session (04/05)

Durée : 3 h ***documents, calculatrices, téléphones cellulaires non autorisés.***

Rédiger les sujets d'algèbre et d'analyse sur des copies séparées. Remettre deux copies même si l'une est blanche.

ALGEBRE

I

Dans $R_2[X]$, montrer que les polynômes $P_1=X^2+2X-3$, $P_2=2X^2-3X+1$, $P_3=X^2-12X+11$, sont liés.

Quelle est la dimension de $F = \mathrm{vect}(P_1, P_2, P_3)$ (sous espace vectoriel engendré par P_1, P_2, P_3.).

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme aX^2+bX+c appartienne à F.

Donner un sous espace supplémentaire de F dans $R_2[X]$.

II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E tel que $f\circ f= id$;

Soit $E^+=\{x, f(x)=x\}$ et $E^-=\{x, f(x)= -x\}$, montrer que E est la somme directe de E^+ et de E^-.

Soit g un endomorphisme de E montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

a) $g\circ f=f\circ g$

b) les sous espaces E^+ et E^- sont stables par g c'est à dire que $g(E^+)\subset E^+$, et $g(E^-)\subset E^-$.

III

Ecrire la matrice carrée d'ordre 4 dont l'élément a_{ij} vaut (i-j), est-elle inversible?

IV

Un endomorphisme f de R^2, transforme le vecteur (1,-1) en (-2,1) et le vecteur (2,3) en (3,-1).
Déterminer les matrices représentatives de f d'une part dans la base canonique de R^2, et d'autre part dans la base B'=(e'_1=(1,1) ; e'_2=(-2,1)).
f est-il un isomorphisme de R^2 ?