Relations d'ordre. Nombres réels

Patrick Delorme

1 Relations d'ordre

Définition:

On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E un procédé qui met en relation des éléments de E par paires. On écrit $x\mathcal{R}y$.

*Exemples:*d'égalité $x = y$. Pour les parties d'un ensemble, relation d'inclusion, $A \subset B$.

On rappelle que le produit cartésien (ou produit) des ensembles E et F est l'ensemble noté $E \times F$ formé des couples (x, y) où x décrit E et y décrit F. On écrit

$$E \times F = \{(x, y) \in E \times F \mid x \in E, \in F\}$$

La première accolade se lit "l'ensemble des ..." et la barre verticale se lit "tels que..." $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur l'ensemble E, l'ensemble $\mathcal{G} := \{(x, y) \in E \times E \mid x\mathcal{R}y$(sous entendu est vrai)$\}$ est appelé graphe de $\mathcal{R}$. Réciproquement si $\mathcal{G}$ est une partie de $E \times E$, la relation $\mathcal{R}$ définie par:

$$\forall (x, y) \in E \times E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{G}$$

admet $\mathcal{G}$ pour graphe.

Définition d'une relation d'ordre:

On dit qu'une relation binaire$\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si et seulement si:

1) $\mathcal{R}$ est réflexive , i.e. :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

2) $\mathcal{R}$ est transitive, i.e.:

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$$

3) $\mathcal{R}$ est antisymétrique, i.e.:

$$\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$$

$(E, \mathcal{R})$ est alors appelé ensemble ordonné.

*Exemples:*un ensemble de nombres , la relation $\leq$ est une relation d'ordre. On note la plupart du temps les relations d'ordre par $\leq$ ou $\preceq$. Autre exemple: on vérifiera que si

E est un ensemble, la relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E définit une relation d'ordre.

Un ordre (ou une relation d'ordre) sur E est dit total si et seulement si:

$$\forall x, y \in E, (x \preceq y \, ou \, y \preceq x)$$

Cette formule se lit : quelque soit (ou pour tout) x, y éléments de E , on a

$$(x \preceq y \, ou \, y \preceq x)$$

Ici le "ou" est le "ou mathematique qui signifie que au moins l'une des 2 assertions est vraie. Sur $\mathbb{N}$ l'ordre $\leq$ est total.

Si $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné et F est une partie de E, on définit un ordre, appelé ordre induit, sur F, $\preceq'$ par:

$$\forall x, y \in F, x \preceq' y \Leftrightarrow x \preceq y$$

Si l'ordre est total sur E , il est clair qu'il en va de même pour l'ordre induit sur F.

Définition d'un majorant, d'un minorant:

Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$. On appelle majorant (respectivement minorant) de A tout élément M (resp. m) de E tel que:

$$\forall x \in A, x \preceq M \; (resp. m \preceq x)$$

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe , on dit que A est majorée (resp. minorée).

Proposition et définition:

Il y a au plus un élément de A qui majore (resp. minore) A. S'il existe, on l'appelle le plus grand (resp. plus petit) élément de A. On le note parfois $Max\, A$ (resp. $Min\, A$).

Démonstration:

Soient M, M' des éléments de A qui majorent A. Alors on a $M \preceq M'$ car M' majore A et M est élément de A. De même on a $M' \preceq M$. D'où $M = M'$ d'après l'antisymétrie de la relation d'ordre.C.Q.F.D.

Définition de la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie d'un ensemble:

La borne supérieure (si elle existe) d'une partie A d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A. On la note $SupA$ et on dit en abrégé que c'est le plus petit des majorants de A. On définit de même la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants de A (s'il existe) et on le note $InfA$.

Exemple:'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ posséde un plus petit élément qui est sa borne inférieure, mais pas de plus grand élément. Il possède 1 pour borne supérieure (le vérifier).

Proposition:

Si $a_1, ..., a_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{a_1, ..., a_n\}$ possède un plus grand élément.

*Démonstration:*raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est clair. Supposons le résultat vrai pour n et montrons le pour $n+1$. Soit M le plus grand élément de $\{a_1, ..., a_n\}$, qui existe d'après l'hypothèse de récurrence. Alors M et a_{n+1} sont comparables (l'ordre sur $\mathbb{R}$ est total), donc l'un des deux est plus grand que (ou égal à) l'autre et c'est le plus grand élément de $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$.

Remarque:

La proposition précédente est valable pour tout ensemble totalement ordonné.

Exercices:

1)$(\mathcal{P}(E), \subset)$ est-il un ensemble totalement ordonné? Si A et B sont des parties de E, montrer l'existence de $Sup\{A, B\}$ et de $Inf\{A, B\}$ et les déterminer.

2)Montrer que la relation sur $\mathbb{N}$: x divise y est une relation d'ordre . Cet ordre est-il total. Déterminer $Inf\{x, y\}$ lorsqu'il existe.

2 Corps des nombres réels

Théorème d'existence du corps des nombres réels (admis)

Il existe un corps noté $\mathbb{R}$, muni d'un ordre total, $\leq$, tel que:

1)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \leq y\, et\, 0 \leq z) \Rightarrow (xz \leq yz)$$

(on dit que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné).

2)

$$\forall x, y, \in \mathbb{R},\ (x > 0) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, nx > y)$$

Ici nx vaut pour $x + ... + x$, avec n termes. La propriété dit qu'à pas réguliers on va aussi loin que l'on veut. On dit que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien. On notera que pour le moment $\mathbb{Q}$ vérifie toutes ces propriétés.

3)Axiome de la borne supérieure:

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). Cette fois $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas cette propriété.

Enfin $\mathbb{R}$ est unique à isomorphisme près. C'est à dire : pour tout corps totalement ordonné et archimédien, K, satisfaisant l'axiome de la borne supérieure, il existe un isomorphisme de corps ordonné entre K et $\mathbb{R}$, i.e. une bijection f entre K et $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x, y, \in K,\ f(x + y) = f(x) + f(y)\, et\, f(xy) = f(x)f(y)$$

$$\forall x, y, \in K,\ (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$$

Remarque:

Le corps des nombres rationnels s'identifie à un sous-corps de $\mathbb{R}$: si p et q sont des éléments de $\mathbb{N}$ avec $q \neq 0$, on identifie p à $1 + ... + 1$, p fois et alors p/q est identifié à p multiplié par l'inverse de q.

Théorème des coupures :
Soit (A, B) une partition de $\mathbb{R}$ (i.e. $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \emptyset$), A et B étant différents de l'ensemble vide et vérifiant :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b \ (*)$$

Alors il existe un nombre réel unique, c, tel que:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq c \leq b$$

Démonstration:
Comme A et B sont non vides et que tout élément de B majore A (resp. tout élément de A minore B), A admet une borne supérieure c et B possède une borne inférieure d. Alors d'après $(*)$, on a :

$$\forall b \in B, c \leq b$$

car b est un majorant de A et c est le plus petit de ceux ci. Donc c est un minorant de B. Par suite c est plus petit que le plus grand de ceux-ci, soit encore :

$$c \leq d$$

Alors A est contenu dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$, et B est contenu dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid d \leq x\}$. Comme (A, B) est une partition de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid c < x < d\}$, qu'il est naturel de noter $]c, d[$, est vide. En effet un élément de cet ensemble n'appartiendrait ni à A ni à B. Mais

$$A \cup B = \mathbb{R}$$

Donc un tel élément n'existe pas.

On va montrer que le fait que $]c, d[= \emptyset$, avec $c \leq d$ implique l'égalité de c et d. D'après les propriétés de l'ordre, si $]c, d[= \emptyset$, on a aussi $]0, d - c[= \emptyset$.Raisonnons par l'absurde et supposons c différent de d. Alors $d - c > 0$ et en utilisant la propriété d'Archimède avec $x = 1$ et $y = d - c$ on a:

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \ n(d - c) > 1$$

mais alors $d - c > 1/n > 0$ et $1/n$ un élément de $]0, d - c[$. Une contradiction qui prouve que $c = d$. Ce nombre réel vérifie les propriétés voulues. On montrera en exercice son unicité.

Remarque: Evidemment, $\mathbb{R}$ est l'ensemble habituel, mais qui n'a jamais été défini correctement au lycée. Ici nous en faisons une présentation axiomatique. A noter que durant votre scolarité, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont été en principe construits à partir de $\mathbb{N}$, ce dernier étant donné d'ordinaire par les axiomes de Péano.

Axiomes de Péano:

Il existe un ensemble totalement ordonné $\mathbb{N}$ *possèdant les propriétés suivantes.*

1) $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément zéro.*

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, l'ensemble des éléments de* $\mathbb{N}$ *strictement plus grand que* n *admet un plus petit élément, appelé successeur de* n *, et noté* $n+1$.

3) Soit E *une partie de* $\mathbb{N}$ *qui contient* 0 *et telle que, si* $n \in E$*, alors le successeur* $n+1$ *de* n *est élément de* E*. Alors* E *est égal à* $\mathbb{N}$.

Pour $\mathbb{Q}$ il s'agit de la construction des fractions dites équivalentes.

Le théorème précédent suggère une façon de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$: gros un nombre réel est une coupure de $\mathbb{Q}$, c'est à dire une partition (A, B) de $\mathbb{Q}$, A et B étant différents de l'ensemble vide et vérifiant :

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$$

Le "en gros" veut dire qu' à un nombre rationnel (un élément c de $\mathbb{Q}$) il correspond 2 coupures et non une, à savoir d'une part $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq c\}$, $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid c < b\}$, et d'autre part $A' = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < c\}$, $B' = \{b \in \mathbb{Q} \mid c \leq b\}$. Par exemple $\sqrt{2}$ est donné par la coupure de $\mathbb{Q}$: $A = A \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \, ou \, a^2 < 2\}$ et $B = \{B \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \, et \, b^2 > 2$, définition qui ne fait intervenir que $\mathbb{Q}$.'étudiant interessé pourra se demander comment on définit l'addition des nombres réels, c'est à dire comment on définit l'addition des coupures.

Une fois construit $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions du théorème, la correspondance dans l'autre sens, nombres réels-coupures peut être donnée par :

à tout x élément de $\mathbb{R}$ on associe la coupure (A, B) de $\mathbb{Q}$, avec $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq x\}$ et $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid c < b\}$.

Théorème:

Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel ainsi qu'un nombre irrationnel (en fait il en existe une infinité).

Exercice:

1) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas élément de $\mathbb{Q}$.

2) Montrer que $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, bien que A soit majorée dans $\mathbb{Q}$.

Rappelons que toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (cela fait partie des axiomes de Peano).Plus généralement toute partie minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Proposition et définition:

Soit $x \in \mathbb{R}$.*Il existe un unique* $p \in \mathbb{Z}$ *tel que:*

$$p \leq x < p + 1$$

On l'appelle partie entière de x.

*Démonstration:*Démontrons que si p existe, il est unique . Supposons qu'il existe deux éléments de $\mathbb{Z}$, p et p' vérifiant la propriété ci-dessus. Alors on a $0 \leq x - p < 1$ et

$0 \leq x - p' < 1$. D'où $-1 < p' - x \leq 0$ et par addition avec la première inégalité, on en déduit: $-1 < p' - p < 1$. Comme p et p' sont des entiers, il en résulte que $p = p'$, comme désiré. Enfin pour l'existence, traitons le cas $x > 0$. Dans ce cas, il est clair que le plus grand élément de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$ convient.

Théorème de caractérisation de la borne supérieure d'une partie majorée de $\mathbb{R}$*:*

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et M un élément de $\mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure de A si et seulement si:

(i) $\forall x \in A, x \leq M$

(ii)$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$

Démonstration:

Supposons $M = SupA$. Alors (i) est vrai. Par ailleurs si (ii) était faux, on aurait:

$$\exists \varepsilon,\ \forall x \in A, non(M - \varepsilon < x \leq M)$$

Comme on a : $\forall x \in A, x \leq M$,on a donc:

$$\exists \varepsilon,\ \forall x \in A, M - \varepsilon \geq x$$

Mais alors $M-\varepsilon$ est un majorant de A et l'on a $M-\varepsilon$ qui majore $SupA$, puisque celui-ci est le plus petit d'entre eux. C'est une contradiction , qui prouve la partie "seulement si" du théorème. Prouvons la partie "si". Soit M un élément de $\mathbb{R}$ vérifiant (i) et (ii). Alors M est un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit. Soit M' un majorant de A avec $M' \leq M$. Si $M' \neq M$, on note $\varepsilon = M - M' > 0$. D'après (ii) on a:

$$\exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$$

Or $M - \varepsilon = M - (M - M') = M'$ et l'on a donc dans la ligne ci dessus $x > M'$, ce qui prouve que M' n'est pas un majorant de A. Cette contradiction montre que $M' = M$ comme désiré. Donc M est le plus petit des majorants de A, i.e. $M = SupA$. C.Q.F.D.

3 Logique: quantificateurs, négation d'assertions

Dans l'assertion suivante:

$$\forall x \in A, \exists y \in B \text{ "," } x < y$$

"," se lit "tel que". L'ordre des quantificateurs est très important, comme on s'en rendra compte en comparant l'assertion précédente avec :

$$\exists y \in B\ , \forall x \in A\text{"," } x < y$$

Dans cette derniére, "," se lit "on a" Dans la négation d'une assertion donnée , les quantificateurs $\forall$ ("quelque soit" ou "pour tout") et $\exists$ ("il existe") sont échangés . De plus si P et Q sont des assertions, on a les règles de négation suivantes:

$$non(P \text{ et } Q) \text{ équivaut à } (non\ P) \text{ ou } (non\ Q)$$

où le "ou" est le ou mathématique, c'est à dire au moins l'une des deux assertions est vraie.

$$non(P\ ou\ Q)\ équivaut\ à\ (non\ P\ et\ non\ Q)$$

$$non(P\ \Rightarrow\ Q)\ équivaut\ à\ (P\ et\ non\ Q)$$

Donnons un exemple. La négation de :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,","\,(n \geq N) \Rightarrow (\mid u_n - l \mid < \varepsilon)$$

admet pour négation:

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in N, \exists n \in \mathbb{N}\,","\,(n \geq N)\ et(\mid u_n - l \mid \geq \varepsilon)$$

. Dans la première assertion "," vaut pour "on a" et dans la négation, cela vaut pour "tel que". Voyons ce qui se passe pour la forme abrégée:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mid u_n - l \mid < \varepsilon$$

dont la négation est:

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \mid u_n - l \mid \geq \varepsilon$$